



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

## **ANTTI KALLONEN**

Suuntakulmaan perustuvien radiolähtetimen paikannusalgoritmien  
paikannustarkkuuden arviointi

Diplomityö

## ALKUSANAT

Tässä diplomityössä tutkittiin radiolähetteen suuntakulmaan perustuvia radiolähettimen paikannusalgoritmeja. Tavoitteena oli arvioida algoritmien paikannustarkkuutta simuloituihin radiolähettimiin vaihtelevilla etäisyyksillä suuntakulmaa mittaavista antureista. Kiitokset työn ohjauksesta Antti Asialle sekä aiheeseen liittyvistä keskusteluista Janne Mansikkamäelle ja Markus Virtaselle. Kiitokset myös isälleni Urpo Kalloselle kannustuksesta ja motivoinnista. Työ on tehty Tampereen teknillisessä yliopistossa vuonna 2013.

Tampereella 26.4.2013

Antti Kallonen

# ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Information Technology and Electrical Engineering

**KALLONEN, ANTTI:** Evaluating accuracy of azimuth based radio emitter locating algorithms to simulated emitters

Master of Science Thesis, 42 pages, 0 Appendix pages

June 2013

Major: Embedded systems, Software engineering

Examiner: Hannu-Matti Järvinen

Keywords: radio emitter locating, emergency beacon, geospatial regression, Gauss-Newton, Kalman-filter, genetic optimization

Measuring radio signal from transmitter at multiple geographical points allows the measurer to determine the location of the emitter. Emitter geolocation can be used to detect emergency beacons after plane crashing or ship sinking. Radio transmitter can be located using time difference of arrival to multiple sensor sites or measure the direction of incoming wavefront at multiple locations. This thesis concentrates to azimuth based radio emitter locating methods. Timely arrival of help to right location is very important and at the same time rescue resources can be minimized if the location estimation algorithm is accurate. There exists multiple references to azimuth based emitter locating algorithms but no data on their performance on a wide geographical area. This thesis compares locating accuracy of three different azimuth based algorithms to simulated emitters. Algorithms are gradient descent based Gauss-Newton algorithm, evolution computation based genetic optimization and estimation of error covariance based Kalman-filter. Using two measurements from every transmitter the mean locating error of the algorithms is quite similar. However when increasing the measurement count to 20 measurements from every transmitter the Gauss-Newton algorithm provides clearly the most accurate results and is able to locate even the most difficult transmitters. Conclusion is that the Gauss-Newton algorithm provides the most accurate azimuth based geolocating results if there is multiple measurements available to the same transmitter.

# TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Sähkö- ja tietotekniikan tiedekunta

**KALLONEN, ANTTI:** Suuntakulmaan perustuvien radiolähtetimen paikannusalgoritmien paikannustarkkuuden arviointi

Diplomityö, 42 sivua, 0 liitesivua

Kesäkuu 2013

Pääaine: Sulautetut järjestelmät, ohjelmistotekniikka

Tarkastaja: Hannu-Matti Järvinen

Avainsanat: radiolähtetimen paikantaminen, hätälähetin, maantieteellinen regressio, Gaussin ja Newtonin algoritmi, kalman-suodatin, geneettinen optimointi

Radiolähtetimen mittaaminen useassa maantieteellisessä pisteessä mahdollistaa radiolähtetimen paikantamisen. Radiolähtetimen paikantamista voidaan käyttää etsittäessä onnettomuuteen joutuneita laivoja, lentokoneita ja ihmisiä. Tällöin etsintä tapahtuu paikantamalla radiosignaalia lähettävä hätälähetin radiolähtetimen paikantamiseen soveltuvilla antureilla. Radiolähtetimiä voidaan paikantaa joko mittaamalla radio-aaltojen aikaeroa tai tulosuuntaa useassa maantieteellisessä pisteessä. Tässä työssä keskitytään radioaaltojen tulosuuntaa mittaaviin antureihin. Mahdollisimman tarkka paikannus nopeuttaa avun saapumista paikalle ja pienentää tarvittavia pelastusresursseja. Kirjallisuudesta löytyy paljon kuvauksia suuntakulmaan perustuvista radiolähtetimen paikannusalgoritmeista, mutta niiden paikannustarkkuudesta paikannettaessa radiolähtetimiä laajalla maantieteellisellä alueella on hyvin vähän tietoa. Tämän työn tutkimusongelmana on tutkia kolmen eri tavalla ratkaisuun päätyvän suuntakulmaan perustuvan radiolähtetimen paikannusalgoritmin paikannustarkkuutta. Paikannustarkkuutta arvioidaan samoihin simuloituihin radiolähtetimiin laajalla maantieteellisellä alueella jolloin algoritmien paikannustulokset ovat vertailukelpoisia keskenään. Paikannusalgoritmeiksi valittiin gradienttioptimointiin perustuva Gaussin ja Newtonin algoritmi, evoluutiolaskentaan perustuva geneettinen optimointi sekä virhejakauman arviointiin perustuva Kalman-suodatin. Algoritmien paikannustuloksia arvioitiin paikantamalla radiolähtetimiä kahdella mittauksella per kohde ja 20 mittauksella per kohde. Käytettäessä kahta mittausta jokaisesta radiolähtetimestä kaikkien paikannusalgoritmien keskimääräinen paikannusvirhe oli hyvin lähellä toisiaan. Siirryttäessä paikantamaan radiolähtetimiä 20 mittauksella per radiolähetin Gaussin ja Newtonin algoritmin paikannustarkkuus parantui huomattavasti ja se kykeni paikantamaan radiolähtetimiä luotettavasti koko simuloidulta alueelta toisin kuin geneettinen optimointi ja Kalman-suodatin. Paras paikannustarkkuus saavutetaan siis Gaussin ja Newtonin algoritmilla jos käytettävissä on useita mittauksia samasta radiolähtetimestä.

# SISÄLLYS

1.	Johdanto .....	1
2.	Radioaallot .....	2
2.1	Sähkömagneettinen spektri.....	2
2.2	Radioaaltojen vastaanottaminen ja lähettäminen .....	3
3.	Radiolähettimen paikannusmenetelmät .....	4
4.	Radiolähettimien paikantaminen käytännössä .....	11
5.	Radiolähetteen suuntakulman mittaamiseen perustuvat paikannusalgoritmit .....	15
5.1	Gaussin ja Newtonin algoritmi.....	15
5.2	Kalman-suodatin .....	18
5.2.1	Perinteinen Kalman-suodatin .....	19
5.2.2	Laajennettu Kalman-suodatin.....	22
5.3	Geneettinen optimointi .....	24
5.3.1	Geneettisen algoritmin toiminta .....	26
6.	Radiolähettimien simulointi .....	29
7.	Paikannusalgoritmien paikannustarkkuuden arviointi .....	31
8.	Johtopäätökset.....	41
	Lähteet.....	43

# 1. JOHDANTO

Radiolähetteen mittaaminen useassa maantieteellisessä pisteessä mahdollistaa radiolähettimen paikantamisen. Paikannusta voidaan käyttää paikannettaessa hätälähettä onnettomuuden jälkeen. Hätälähettimet lähettävät radiosignaalia tunnetulla taajuudella ja käynnistyvät onnettomuuden tapahduttua. Viranomaisten täytyy tämän jälkeen selvittää lähettimen sijainti, ellei mitään muuta tietoa onnettomuuden tapahtumapaikasta ole. Mahdollisimman tarkka ja nopea paikannus nopeuttaa avun saapumista oikeaan paikkaan.

Radiolähetteitä paikannetaan joko lähetteen suuntakulmaan perustuen tai mittaamalla signaalin aika-eroa useassa maantieteellisessä pisteessä. Tässä työssä keskitytään arvioimaan suuntakulmaan perustuvien paikannusalgoritmien paikannustarkkuutta. Kirjallisuudesta löytyy useita algoritmeja paikannustuloksen laskemiseen, mutta tietoa on hyvin vähän paikannusalgoritmien paikannustarkkuudesta tai paikannustuloksista eri etäisyyksillä sijaitseviin radiolähettäisiin. Tutkimusongelmana on valittujen radiosuuntimaan perustuvien paikannusalgoritmien paikannustarkkuuden arviointi simuloituihin radiolähettäisiin. Simulaatiossa luodaan radiolähettäisiä vaihteleville etäisyyksille radiolähettimen suuntaa mittaavista antureista. Tavoitteena on myös tutkia onko paikannusalgoritmien toiminta ennustettavissa paikannettaessa radiolähettäisiä x-y-tasolla vai tuottaako joku algoritmi yllättäviä epäjatkuvuuskohtia.

Työssä käsitellään aluksi perusteita radioaalloista sekä radiolähettimen paikannusmenetelmistä. Tämän jälkeen esitellään radiolähettimen paikannuksen käytännön sovellutuksia sekä siirrytään käsittelemään suuntakulmaan perustuvia radiolähettimen paikannusalgoritmeja. Seuraavaksi esitellään simulaatio paikannusalgoritmien vertailua varten sekä simulaation tulokset. Lopuksi käsitellään simulaation tulokset ja tehdään yhteenveto paikannusalgoritmien paikannustarkkuudesta.

## 2. RADIOAALLOT

Radioaallot ovat sähkömagneettista säteilyä, jonka aallonpituus on pidempi kuin infrapunavalon. Radioaallot etenevät valon nopeudella. Luonnossa radioaaltoja esiintyy salamoiden ja avaruuden taustasäteilyn ansiosta. Ihmisen muodostamat radioaallot liittyvät esimerkiksi kommunikaatiovälineisiin, navigointijärjestelmiin sekä tutkaan.

Radioaaltojen eteneminen ja heijastuminen riippuvat radioaaltojen aallonpituudesta. Pienet aallonpituudet etenevät suoraviivaisesti, muuttaen vain vähän suuntaansa ilmakehässä. Suuret aallonpituudet taas taipuvat ilmakehässä ja voivat edetä jopa maapallon toiselle puolelle. Radioaaltojen heijastuminen maastonmuodoista ja rakennuksista muodostavat suurimman ongelman radioaaltojen lähteen paikantamisessa. Heijastuksien ja monitie-etenemisen takia radioaallot eivät välttämättä etene suoraviivaisesti lähettimestä vastaanottoimeen. Radiolähettimien paikannusmenetelmien täytyy ottaa huomioon heijastuksista johtuva vääristyminen radiosignaalisissa. [1; 2].

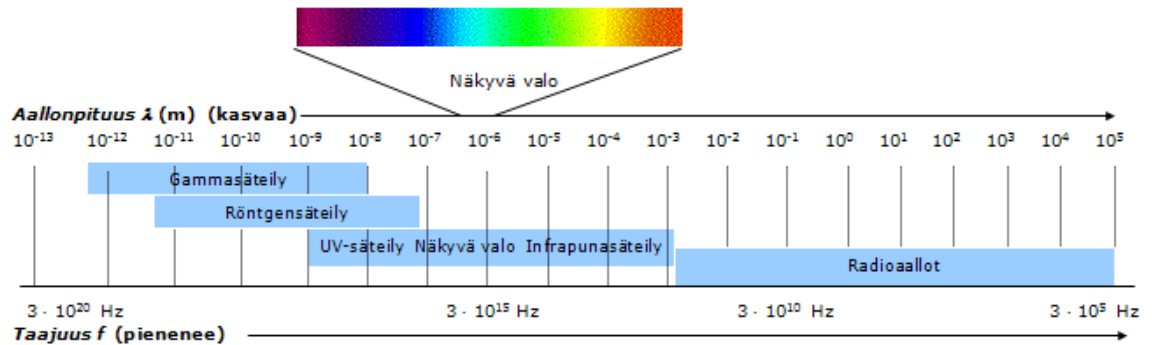
Radioaaltoja muodostetaan antennissa resonanssiin perustuen. Tällöin sähköisen piirin energia siirtyy sähkömagneettiseksi säteilyksi. Radioaallot välittävät tietoa muuttamalla sähkömagneettisen säteilyn taajuutta, amplitudia tai vaihetta. Radioaaltoja muodostuu, kun johtavan antennin pinnan elektronit virittyvät piiristä syötetyn muuttuvan sähkövirran ansiosta. [1]

### 2.1 Sähkömagneettinen spektri

Sähkömagneettisen säteilyn kaikkia mahdollisia taajuuksia sanotaan sähkömagneettiseksi spektriksi. Sähkömagneettinen spektri lähtee matalista taajuuksista, jotka ovat radioaaltoja, päättyen suuriin taajuuksiin, aina gammasäteilyyn asti. Kuvassa [1] on esitetty radioaaltojen sijoittuminen sähkömagneettisessa spektrissä. Radioaaltojen aallonpituus on välillä 10 m – 1 cm. [1] Radioaaltojen käyttämä alue sähkömagneettisesta spektristä on viranomaisten tarkoin säätelemää. Radiolähettimen käyttöön vaaditaan Suomesa viestintäviraston lupa, ja radiolähettimen teho ja kaistanleveys ovat tarkkaan säädeltyjä. [1]

Radioaallot välittävät informaatiota joko sähkömagneettisen signaalin taajuuden, vaiheen tai amplitudin muutoksena. Radiolähettimen muodostamaa perustaajuutta sähkömagneettisessa spektrissä kutsutaan kantoaalloksi. Tätä kantoaaltoa moduloidaan radiolähettimessä niin, että välitettävä informaatio siirtyy osaksi kantoaallon vaihetta, taajuutta tai amplitudia. Radiosignaalia, jonka informaatio välittyy kantoaallon taajuuden muutoksessa, sanotaan taajuusmoduloiduksi, ja siitä käytetään lyhennettä FM. Kun in-

formaatio välittyy kantoaallon amplitudissa, radiosignaalia sanotaan amplitudimoduloiduksi, jonka lyhenteenä on AM. Vaihemoduloidut signaalit ovat yleensä digitaalisia signaaleita. Niissä radiolähetteen informaatio välittyy kantoaallon vaiheen muutoksena. [1]



**Kuva 1:** Sähkömagneettinen spektri [5]

## 2.2 Radioaaltojen vastaanottaminen ja lähettäminen

Vastaanottimen tarkoituksena on muuntaa radioaaltojen sisältämä informaatio käytettävään muotoon. Vastaanottimen tapauksessa sähkömagneettisesta signaalista saadaan ensin sähköistä signaalia antennin avulla, jonka jälkeen radiovastaanotin tulkitsee radiolähetteen sisältämän informaation ja syöttää sen esimerkiksi äänisignaaliksi kaiuttimesta. [3] Antennit muuntavat sähkömagneettista säteilyä sähkövirraksi ja sähkövirtaa sähkömagneettiseksi säteilyksi. Fyysisesti antenni muodostuu yhdestä tai useammasta johdelementistä, joihin johdetaan muuttuvaa sähkövirtaa, jolloin antennin elementit muodostavat radioaaltoja. Vastaanotossa sähkömagneettinen säteily muodostaa antenniin muuttuvan sähkövirran, joka voidaan mitata ja muuntaa elektroniseksi signaaliksi. Antennelementtien koko ja muoto ratkaisevat antennin säteilykuvion. Säteilykuvio tarkoittaa sitä, kuinka hyvin antenni lähettää ja vastaanottaa sähkömagneettista säteilyä mistäkin suunnasta. Ympärisäteilevä antenni vastaanottaa ja lähettää radioaaltoja yhtä tehokkaasti joka suuntaan, kun taas suuntaava antenni lähettää tiettyyn suuntaan, mutta tähän suuntaan lähetettäessä radioaallot vahvistuvat myös enemmän kuin ympärisäteilevän antennin tapauksessa. [1; 3] Antennin koko ja muoto vaikuttaa antennin kykyyn lähettää ja vastaanottaa radioaaltoja eri taajuuksilla. Antennin fyysinen pituus täytyy olla vähintään neljäsosa lähetettävän tai vastaanotettavan radioaallon aallonpituudesta. [3]

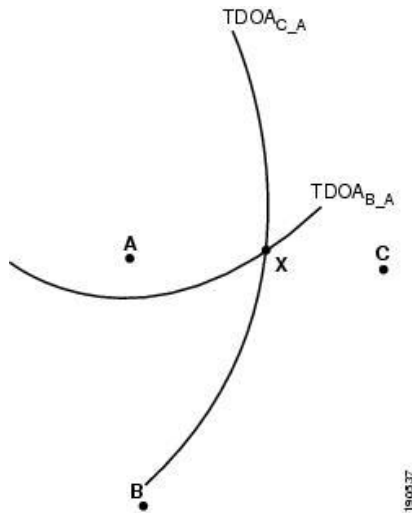


### 3. RADIOLÄHETTIMEN PAIKANNUSMENETELMÄT

Radiolähettimien paikannusta tarvitaan paikannettaessa hätälähtimiä onnettomuuden tapahduttua. Hätälähtimiä löytyy veneistä, lentokoneista sekä yksittäisiltä ihmisiltä. Hätälähetin käynnistyy automaattisesti esimerkiksi veteen upotettaessa tai manuaalisesti käyttäjän kytkiessä lähettimen päälle.

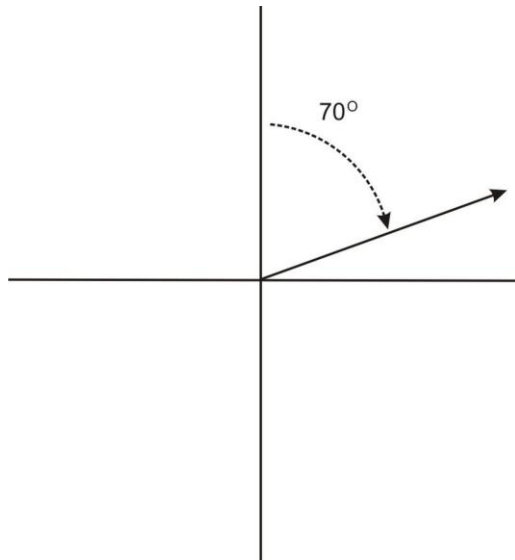
Radiolähteitä voidaan paikantaa joko suuntakulmaan perustuen eli selvitetään missä suunnassa radiolähetin sijaitsee yksittäisen anturin näkökulmasta jonka jälkeen yhdistetään useamman anturin suuntatulokset paikannuksen saamiseksi. Tämän menetelmän etuna on, että anturien suuntatulokset voidaan yhdistää vasta myöhemmin eikä järjestelmä tällöin vaadi tiedonsiirtoa yksittäisten anturien välillä. Haittapuolena on että suuntakulmaan perustuvilla menetelmillä ei päästä yhtä tarkkaan paikannustulokseen kuin aikaeroon perustuvassa paikannuksessa. [1]

Lähtimiä voidaan paikantaa myös vertaamalla radiosignaalien aikaeroja useamassa maantieteellisessä pisteessä. Tällöin voidaan signaalien aikerojen perusteella laskea radioaaltojen alkupiste kun aaltorintaman nopeus tiedetään. Aikaeroon perustuvia paikannusmenetelmiä on tutkittu paljon GPS:n yhteydessä [1]. Kuvassa [2] on esitetty aikaeropaikannuksen periaate tuntemattomaan radiolähettimeen. Paikannusjärjestelmä koostuu kolmesta mittausanturista. Yksi antureista toimii aikareferenssinä. Kuvassa anturi A. Aaltorintaman saapuessa antureille B ja C nämä ottavat muistiin ajan jolloin radiosignaali saapui anturille. Saapumisajan mittaaminen vaatii siis epäjatkovaa tai muuttuvaa radiosignaalia jotta voidaan löytää yhteiset referenssipisteet joiden avulla signaalien vertailua suoritetaan [2]. Tämän jälkeen verrataan antureilla B ja C mitattuja radiosignaalin saapumisaikoja anturilla A mitattuun aikaan. Näistä ajoista voidaan piirtää antureilta B ja C käyrät  $TDOA_{C\_A}$  ja  $TDOA_{B\_A}$  joilla paikannettavan lähettimen tulee sijaita. Näille käyrille voidaan laskea leikkauspiste  $x$  joka on arvioi radiolähettimen sijainnista x-y-tasolla.



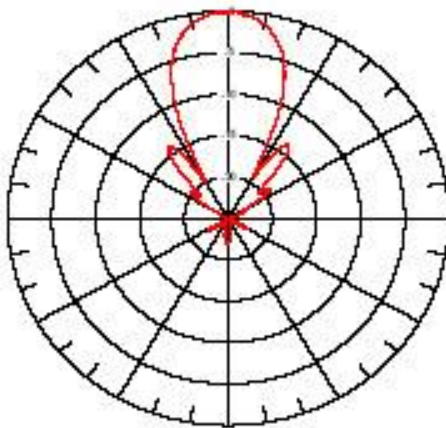
**Kuva 2:** Aikaeropaikannuksen periaate [6]

Matalilla HF-taajuuksilla paikannuksessa voidaan käyttää hyväksi radioaaltojen heijastumista ilmakehästä. Tällöin on mahdollista paikantaa lähettimen sijainti yksittäisen anturin avulla. Heijastuksen avulla paikantaminen perustuu ilmakehän ionisoivan kerroksen korkeuden arviointiin, jolloin lähettimen sijainti saadaan määritettyä heijastuksen tulokulmasta anturille yhdistettynä kohteeseen saadusta suuntakulmasta. Heijastuksen kautta paikantaminen ei kuitenkaan tyypillisesti ole kovin tarkka menetelmä, ja lisäksi se toimii vain hyvin matalilla taajuuksilla ja vain tiettyjen sääolojen vallitessa. [2] Tarkasteluun on valittu vain suuntakulmaan perustuvat menetelmät, sillä tällöin ei vaadita suurta ja reaaliaikaista tiedonsiirtokapasiteettia ja suuntakulmaan perustuva paikannus on helposti toteutettavissa yhdistelemällä esimerkiksi eri pelastusyksiköiltä saatuja mittaustuloksia. Kuvassa [3] on yksinkertainen esitys radiolähetteen tulosuunnasta suhteessa paikantavan anturin antennielementteihin. Asennettaessa paikannusanturia sen antennielementit tulee kalibroida niin, että ne ovat yhtenevät maantieteellisten ilmansuuntien kanssa. Tällöin voidaan olettaa, että paikannusanturin antama 70-asteen kulma tarkoittaa juuri kulmaa suhteessa pohjoiselementtiin jolloin eri paikoissa sijaitsevien antureiden suuntakulmia voidaan vertailla samassa x-y-tasossa. Antureiden kalibroinnista muodostuu myös mittausvirheitä sillä anturielementtejä ei saada tarkalleen linjattua maantieteellisten ilmansuuntien mukaan ja antureiden paikan määrittämisessä muodostuu myös virheitä esimerkiksi GPS:n käytön takia [2]. Nämä virheet oletetaan tässä työssä normaalisti jakautuneiksi.



**Kuva 3:** Suuntakulma radiolähettimeen

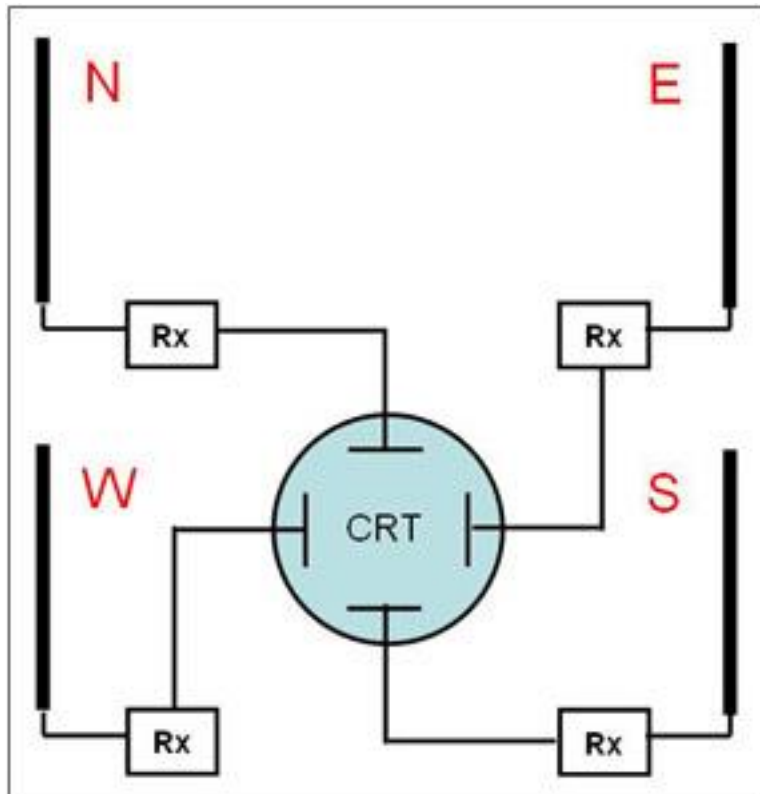
Radiolähtetimen suuntakulmaan perustuvassa paikannuksessa tarvitaan radioaaltojen aaltorintaman suuntaa mittaava anturi. Näitä antureita voidaan toteuttaa esimerkiksi suuntaavaa antennia pyörittämällä, jolloin vakiotehoisen radiolähtetimen suunta saadaan selvittämällä mistä suunnasta vastaanottimeen saadaan suurin teho. Kuvassa [4] on suuntaavan antennin suuntakuvio.



**Kuva 4:** Suuntaavan antennin antennikuvio [3]

Suuntaavalla antennilla on suurin vahvistus pääkeilan suuntaan, jolloin suuntakulma radiolähteeseen saadaan suuntaavaa antennia pyörittämällä. Radiolähete sijaitsee siinä suunnassa, mistä saadaan suurin teho vastaanottimeen. Vastaanotinantennin säteilykuviota voidaan muuttaa joko mekaanisesti pyörittämällä antennia tai interferometriperiaatteella. Interferometri perustuu samaan tyyliin antennin suuntakuvion pyörittämiseen. Tämä tapahtuu vain sähköisesti, jolloin suunnan saaminen on paljon nopeampaa kuin mekaanisesti pyöritettävällä antennilla. Kuvassa [5] on esitetty neljän eri ilman-

suuntiin asetetun antennielementin kytkeminen sähköisesti yhteen. Jokaisella antennielementillä on oma vastaanotin, joista mitattu ja vahvistettu signaali yhdistetään vaihevertailijassa. Vaihevertailija vertailee antennin mittaamia radiosignaaleja pareittain keskenään. Kahdella antennielementillä saadaan mitattua suora jolla radiolähttimen tulee sijaita. Tällöin jää kuitenkin kaksi suuntaa jotka molemmat ovat yhtä sopivia radiolähtteen tulosuunnaksi. Ottamalla mittaustulokseen mukaan myös kahden muun antennielementin vaihevertailut saadaan toinen suunnista suljettua pois ja esitettyä vain yksi mahdollinen tulosuunta radiolähteelle [2].



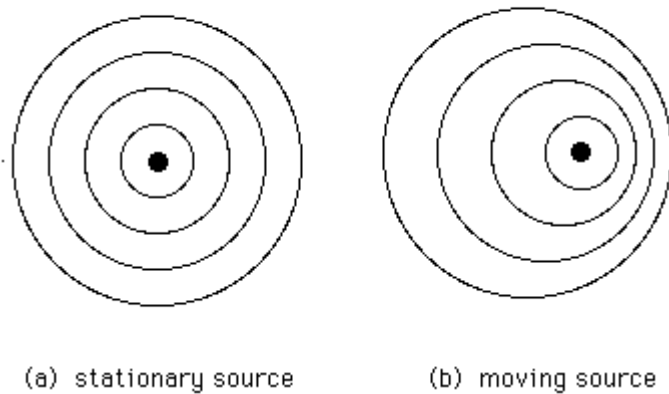
**Kuva 5:** Interferometrin antennikytkentä [7]

Tällöin antennin suuntakuviota voidaan muuttaa elektronisesti lisäämällä tai poistamalla antennielementtejä kytkennästä. Interferometripaikannus perustuu siihen, että antennin mittauskantaan tulevan sähkömagneettisen säteilyn vaihe-ero kahdessa pisteessä riippuu säteilyn tulokulmasta. Vaihe-eroa mitataan vähintään kahdella antennilla, ja vaihevertailijalla. Interferometripaikannuksen etuna on laajakaistaisuus, mutta haittoina laajakaistaisuuden mukanaan tuoma epäherkkyys sekä antennivahvistus antenniryhmässä, joka koostuu yleensä puolialtrodipoleista [2].

Useiden erillisten radioaaltojen suuntaa mittaavien antureiden tuloksista saadaan paikannustulos x-y-tasossa yhdistämällä mittaukset. Matemaattisesti saman pisteen kautta kulkevat suorat leikkaavat vain yhdessä pisteessä. Todellisuudessa kuitenkin mitatuissa radioaaltojen tulosuunnissa on kuitenkin virheitä, jotka muodostuvat radioaaltojen heijastuksista, mittauslaitteiden epätarkkuudesta, kalibrointivirheistä ja sähkömag-

neettisesti kohinasta. Tästä johtuen tarvitaan paikannusalgoritmeja, jotka pystyvät arvioimaan radiolähtetimen sijaintia epätarkoista mittauksista huolimatta. [1] Radiolähteen tulosuunnan mittaamiseen voidaan käyttää myös dopplersiirtymää, kuva [6]. Doppler siirtymä aiheuttaa liikkuvalla kohteella aaltorintaman aallonpituuden pienenemisen liikesuuntaan ja vastaavasti aallonpituuden suurentumisen kohteen takana. Dopplertaajuuksien käyttö paikantamisessa vaatii sekä antennin liikenopeuden sekä mitattavan taajuuden tuntemista. Käytännössä tämä onnistuu pyörittämällä antennia vakionopeudella ja mittaamalla samalla radiolähetettä yhdellä paikallaan pysyvällä antennilla. Kuvassa [7] on kuva dopplerantenniryhmästä. Keskellä on paikallaan pysyvä referenssiantenni ja ympärillä sähköisesti pyöritettäviä antennielementtejä.

### Doppler Effect



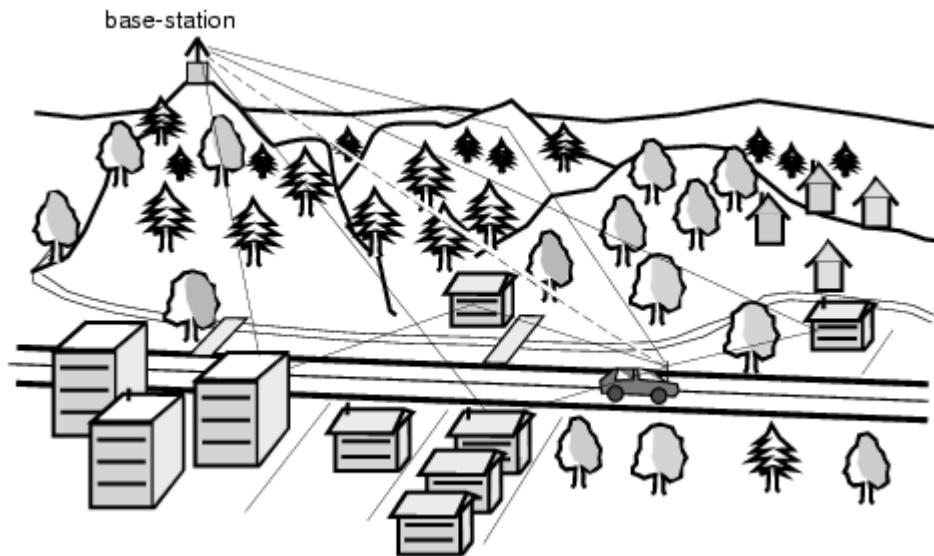
**Kuva 6:** Dopplersiirtymä [8]

Kun pyörivän antennin kulmanopeus tunnetaan, ja lähteen taajuus mitataan paikallaan pysyvää referenssiantennia vasten, voidaan lähteen tulosuunta laskea dopplertaajuden perusteella: lähete on suunnassa, jossa dopplersiirtymä on nolla ja kohtisuoraan maksimaalisen dopplersiirtymän antavia suuntia vastaan. Dopplerpaikannuksen ongelmana on nopeiden lähteiden paikantaminen, koska antennin on pyöryhdettävä vähintään puoli kierrosta, jotta antenni kykenee mittaamaan dopplersiirtymän. [2][1]



**Kuva 7:** Dopplerantenniryhmä [9]

Suuntakulmaan perustuvien paikannusjärjestelmien virhelähteet muodostuvat satunnaisista signaalin heijastumiseen liittyvistä virheistä sekä systemaattisista virheistä, jotka johtuvat antennien paikkojen epätarkkuuksista, sekä kalibrointivirheistä. Kuvassa [8] on esitetty periaatekuva radioaaltojen heijastumisesta rakennuksista, puista ja maastonmuodoista. Lisäksi paikannuksen tarkkuus huononee mitä kauempana antureista ollaan, sillä etäisyyden lisääntyessä pienikin virhe suuntakulmassa aiheuttaa suuren paikannusvirheen. Paikannuksen tarkkuuteen vaikuttaa siis myös anturien lukumäärä ja sijainti suhteessa läheteeseen.



**Kuva 8:** Monitie-eteneminen [10]

Monitie-eteneminen aiheuttaa ympäristöstä riippuen radioaaltojen heijastumista ja vaimenemista ympäröiviin esteisiin. Tällöin mitattu radioaaltojen suunta saattaakin osoittaa alueella olevaan esteeseen, josta radiosignaali on heijastunut.

## 4. RADIOLÄHETTIMIEN PAIKANTAMINEN KÄYTÄNNÖSSÄ

Hätälähettimet ovat yleensä passiivisia lähettämiä, jotka lähettävät ennalta määritellyä signaalia, eivätkä osallistu aktiivisesti paikannukseen. Esimerkkinä lentokoneiden mustat laatikot, laivoihin asennettavat hätälähettimet sekä henkilökohtaiset hätälähettimet [3]. Hätälähettimet aktivoituvat joko miehistön käynnistämänä manuaalisesti tai automaattisesti laivan upotessa tai lentokoneen tehdessä pakkolaskun. Laivoilla automaattinen aktivoituminen tapahtuu veden paineen ansiosta ja lentokoneissa tarpeeksi suuret g-voimat aktivoivat lähettimet. Viranomaisilla on vastaanottimia jotka kuuntelevat lähettimien käyttämiä hätätaajuuksia ja aiheuttavat hälytyksen kun kyseisillä taajuuksilla havaitaan läheteitä. Meriliikenteessä kyseiset hätätaajuudet ovat 121.5, 245 ja 406 MHz. Lentokoneiden hätälähettimet toimivat taajuudella 406 MHz ja henkilökohtaiset hätäpaikantimet käyttävät yleensä joko meriliikenteen tai lentoliikenteen hätätaajuuksia. Maalla sijaitsevat paikannusanturit antavat ensimmäisen arvion hätälähtetimen sijainnista. Tämän jälkeen onnettomuuspaikalle lähetetään pelastushelikopterit, laivoja tai pudonneen lentokoneen tai kadonneen henkilön tapauksessa etsintään voidaan lähteä myös jalkaisin. Kuvassa [9] on pelastushelikopteri ja keskellä sen pohjaa valkoinen hätälähtet-teen suuntaa mittaava anturi.



**Kuva 9:** Pelastushelikopteri varustettuna hätälähtet-teen suuntaa mittaavalla anturilla [11]

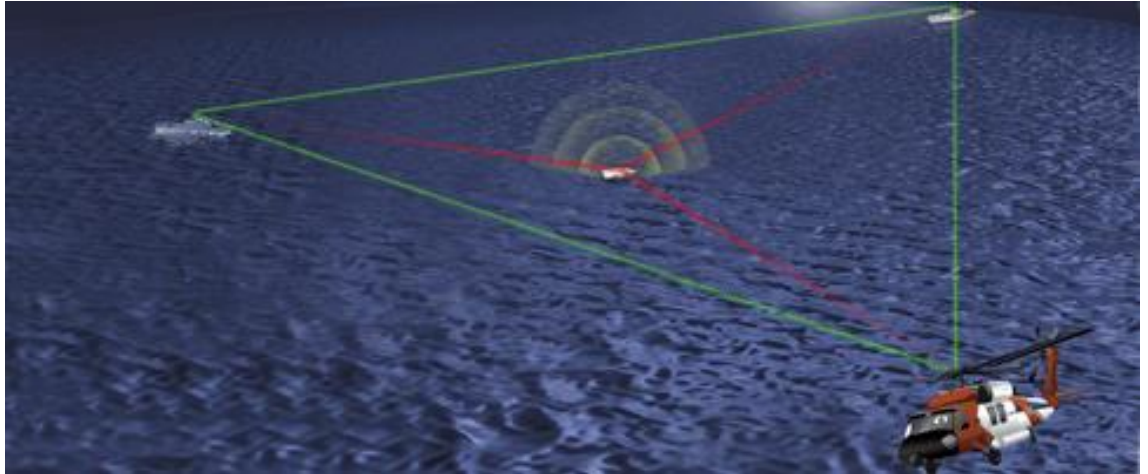


Onnettomuuspaikan sijaitessa vaikeakulkuisessa maastossa maalla etsintöihin osallistuu myös pelastushenkilökuntaa ja vapaaehtoisia maastossa kävellen. Tällöin käytetään onnettomuuspaikan tarkemman sijainnin saamiseen mukana kuljetettavia paikannusantureita, kuva [10].



**Kuva 10:** Kannettava radiolähetteen suuntaa mittaava anturi [12]

Hätälähtetimen paikantaminen vaatii useasta paikasta mitattujen suuntatulosten yhdistämisen. Radiolähetteen suuntaa mitataan esimerkiksi onnettomuuspaikkaa lähestyvistä laivoista sekä pelastushelikopterista, kuva [11]. Yksittäisistä paikoista mitatut suuntatulokset kerätään ja yhdistetään käyttämällä paikannusalgoritmia. Mahdollisimman tarkka ja virheitä sietävä paikannusalgoritmi auttaa tällöin pääsemään onnettomuuspaikalle mahdollisimman nopeasti ja resursseja säästäen.



**Kuva 11:** Hätälähettimen paikantaminen suuntaa mittaavilla antureilla [13]

Hätälähettimet ovat fyysiseltä kooltaan pienikokoisia, kuten kuvassa [12] ja sisältävät radiolähettimen joka lähettää hätäsignaalia kyseiselle toimintaympäristölle ominaisella taajuudella. Meriliikenteen ja ilmailun hätälähettimet sisältävät siis erilaiset radiolähettimet. Hätälähetteen mukana lähetetään yleensä myös lähettävän aluksen tai lentokoneen tunnistetunnus.



**Kuva 12:** Esimerkkejä hätälähettimistä [13]

Hätälähettimet ovat aikaisemmin perustuneet analogiatekniikkaan, jossa hätälähete ja vastaanottava järjestelmä eivät sisällä digitaalisia mikropiirejä. Tällöin suuntakulma lähettimeen saadaan suoraan mittaamalla analogisia jännitteitä vastaanottimessa. Uu-

demmat paikannusjärjestelmät perustuvat digitaalisiin mikropiireihin ja pystyvät tallentamaan hätälähetteen yksilöllisiä tunnisteita, joilla pystytään tunnistamaan hätälähteen alkuperä.

## 5. RADIOLÄHETTEEN SUUNTAKULMAN MITTAAMISEEN PERUSTUVAT PAIKANNUSALGORITMIT

Kaikki suuntakulmaan perustuvat paikannusalgoritmit pyrkivät ratkaisemaan radiolähettimen koordinaatit yhtälöstä

$$f_i(x_i, y_i, x_T, y_T) = \arctan \frac{y_T - y_i}{x_T - x_i} + \varepsilon_i \quad (1)$$

Yhtälössä (1) esitetään suuntakulma  $f_i$  radiolähettimen suuntaa mittaavasta anturista  $i$  koordinaateissa  $[x_i, y_i]$  radiolähettimeen koordinaateissa  $[x_T, y_T]$ . Suuntakulman  $f_i$  virhettä merkitään  $\varepsilon_i$ . Radiolähettimen sijainti voidaan ratkaista yhtälöryhmästä johon otetaan mukaan vähintään kahden eri anturin mittaustulokset.

Tarkasteluun on valittu algoritmeja, jotka pyrkivät pääsemään ratkaisuun toisistaan poikkeavilla tavoilla. Gaussin ja Newtonin algoritmi ratkaisee paikannusyhtälön minimoimalla kaikista paikannusantureista laskettujen suuntien ja arvioidun sijainnin laskennallisen virheen. Algoritmi etenee yhtälön gradientin suuntaisesti ja pyrkii etsimään laskennallisen virheen minimin. Geneettinen optimointi perustuu samoin gradientin suuntaan etenemiseen, mutta käyttää hyväkseen evoluutiolaskentaa jolloin sen pitäisi suoriutua Gaussin ja Newtonin algoritmia paremmin ongelmista, joissa on useita paikallisia minimejä. Kolmas algoritmityyppi on Kalman-suodatin, joka perustuu paikannustuloksen arvioimiseen mittausvirheen jakauman perusteella. Kalman-suodatin perustuu olettamukseen, että mittausvirhe on normaalisti jakautunut ja arvioi tämän avulla radiolähettimen oikeata sijaintia.

### 5.1 Gaussin ja Newtonin algoritmi

Gaussin ja Newtonin algoritmi perustuu epälineaarisen yhtälösarjan ratkaisuun iteratiivisella menetelmällä. Aluksi esitetään alkuarvaus, josta lähdetään etenemään gradientin suuntaan, kunnes löydetään paikallinen minimi. Jokaisen askeleen jälkeen päivitetään yhtälöryhmän virhematriisia, kunnes pienin virhe on saavutettu. Suuntakulmien ta-

pauksessa yhtälöryhmät kuvaavat suoria, jotka kulkevat sekä anturin että lähettimen koordinaatin kautta.

Todellisuudessa suorat eivät todennäköisesti kulje lähettimen koordinaattien kautta, koska mitatuissa suuntakulmissa on aina mittausvirhettä. Gaussin ja Newtonin algoritmi pyrkii kuitenkin minimoimaan yhtälöryhmän kokonaisvirheen, jolloin saadaan arvio lähettimen sijainnista. Yhtälöstä (1) voidaan ratkaista mittausvirhe, jolloin mitatun suuntakulman  $f_i$  virheeksi saadaan:

$$\varepsilon_i = \arctan \frac{y_T - y_i}{x_T - x_i} - f_i \quad (2)$$

Yhtälössä (2) on esitetty anturista  $i$  mitatun suuntakulman  $f_i$  mittausvirhe  $\varepsilon_i$ . Gaussin ja Newtonin algoritmin tavoitteena on etsiä radiolähettimen koordinaateille  $[x_T, y_T]$  arvot jotka minimoivat kaikkien antureiden mittausvirheen  $\varepsilon$ . Suuntakulmien mittausvirheiden oletetaan olevan normaalisti jakautuneita ja toisistaan riippumattomia [1]. Yhtälö (1) linearisoidaan muodostamalla kaksikulotteinen Taylorin sarja, josta on poistettu kaikki korkeammat kuin 1. asteen termit. Linearisoitu yhtälö on muotoa:

$$\hat{f}_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \delta_x + \frac{\partial f_i}{\partial y} \delta_y \approx m_{ki} + \varepsilon_i \quad (3)$$

Yhtälössä (3) esitetään yhteys radiolähettimen arvioidun sijainnin ja mitatun suuntakulman välillä. Merkitään  $\hat{f}_i = f_i(x_k, y_k, \hat{x}_T, \hat{y}_T)$  jossa koordinaatti  $[\hat{x}_T, \hat{y}_T]$  tarkoittaa arvausta radiolähettimen sijainnista  $[x_T, y_T]$ .  $m_{ki}$  tarkoittaa anturin  $k$  mitattua suuntakulmaa  $i$ . Merkitään yhtälössä (3) Taylorin sarja, arvio sijainnista ja mitatut suuntakulmat matriisimuotoon:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ \vdots & \vdots \\ h_{N_s 1} & h_{N_s 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N_s}}{\partial x} & \frac{\partial f_{N_s}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$z = \begin{bmatrix} m_{k1} - \widehat{f}_1 \\ m_{k2} - \widehat{f}_2 \\ \vdots \\ m_{kN} - \widehat{f}_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$e = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} \quad (7)$$

jolloin kaavojen (4), (5), (6) ja (7) avulla (3) voidaan kirjoittaa muotoon

$$H\delta \approx z + e \quad (8)$$

kaava (8) saadaan muunnettua pienimmän neliösumman muotoon, jossa termit on painotettu kovarianssimatriisin mukaan [1]

$$\delta = [H^T R^{-1} H]^{-1} R^{-1} z \quad (9)$$

Kaavassa (9) R on painotusmatriisi, jolla saadaan otettua huomioon kunkin parametrin painotus lopputuloksessa. [1] normaalisti jakautuneen ja toisistaan riippumattomien suuntakulmien mittausvirheiden tapauksessa painotusmatriisi saadaan muotoon:

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_{1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{N^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Kaava (10) on diagonaalimatriisi jonka halkaisijalla on painotuskertoimina suuntakulmien varianssit. Yksittäisen iteraation aikana lasketaan matriisin  $\delta$  arvo kaavan (8) mukaan, jonka jälkeen saadaan uudet arviot lähettimen paikalle

$$\begin{aligned} \hat{x}_{uusi} &= \hat{x}_{vanha} + \delta_x \\ \hat{y}_{uusi} &= \hat{y}_{vanha} + \delta_y \end{aligned} \quad (11)$$

Asettamalla arvot (11) kaavaan (5) saadaan seuraavan iteraation lähtötilanne. Iteraatioita toistetaan, kunnes virhematriisi saavuttaa pienimmän arvonsa.

## 5.2 Kalman-suodatin

Kalman-suodatin on digitaalinen suodatin, joka kykenee estimoimaan dynaamisen järjestelmän tilaa aikaisempien mittaustulosten perusteella, vaikka nämä olisivat epä-

täsmällisiä ja sisältäisivät kohinaa. Kalman-suodin perustuu takaisinkytkentään, jossa kohinaa sisältävistä mittaustuloksista arvioidaan järjestelmän todellinen tila olettamalla mittausrvirheen olevan normaalisti jakautunut.

Dynaamiset järjestelmät voidaan kuvata tilasiirtymä-yhtälöllä

$$s_i = \Phi_i s_{i-1} + B u_{i-1} + n_{i-1}, i = 0, 1, \dots \quad (12)$$

ja mittausvektorilla

$$z_i = H s_i + \eta_i, i = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Kaavoissa (12) ja (13)  $s_i$  kuvaa järjestelmän tilaa hetkellä  $i$  ja  $\Phi$  on tilasiirtymämatriisi, joka muodostaa järjestelmän siirtymän edellisestä tilasta nykyiseen tilaan. Siirtymä voi olla lineaarinen, epälineaarinen, sekä ajasta riippuvainen tai riippumaton. Matriisi  $B$  välittää sisääntulon  $u_{i-1}$  vaikutukset tilaan  $s_i$  ajan hetkellä  $i$ .  $z_i$  kuvaa järjestelmästä otettuja mittaustuloksia ajan hetkellä  $i$  ja matriisi  $H$  välittää järjestelmän oikean tilan mittaustuloksiksi. Kohinavektorit  $n_i$  ja  $\eta_i$  ovat mallinnettu valkoisena kohinana. Dynaamisen järjestelmän tilaa ei ole mahdollista mitata suoraan, vaan järjestelmän nykyistä tilaa arvioidaan mittausvektorista  $z_i$  joka on  $s_i$ :n funktio.

### 5.2.1 Perinteinen Kalman-suodatin

Merkitään  $s_{i| -}$  järjestelmän tilaennustetta ajan hetkellä  $i$ , joka on tuotettu mittaustuloksista ennen hetkeä  $i$  ja  $s_i$  on tilaennuste, kun mukaan otetaan mittaustulos  $z_i$ . Arviointivirheet voidaan merkitä

$$e_{i| -} = s_i - \hat{s}_{i| -} \quad (14)$$

$$e_i = s_i - \hat{s}_i \quad (15)$$

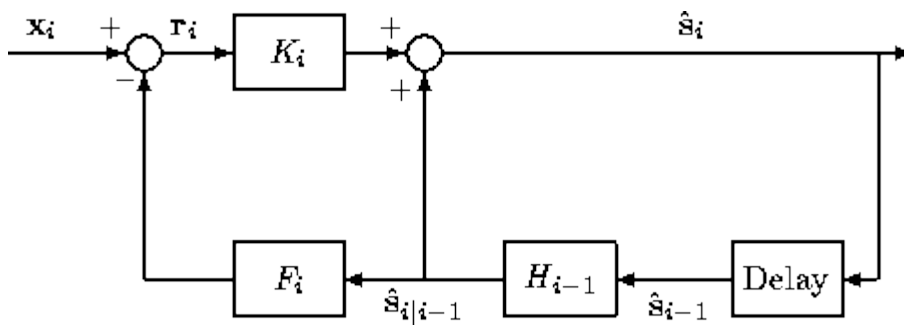
Kaava (14) tarkoittaa arviointivirhettä ennen mittauksen  $i$  ottamista mukaan tilaennusteeseen, ja kaava (15) tarkoittaa virhettä kun mittaus on otettu mukaan tilaennusteeseen.



Virheiden painotetut kovarianssimatriisit ovat

$$\begin{aligned}\Gamma_{i|-} &= \xi \{ e_{i|-} W e_{i|-}^T \} \\ \Gamma_i &= \xi \{ e_i W e_i^T \}\end{aligned}\tag{16}$$

Kaavassa (16)  $W$  on diagonaalinen painotusmatriisi, johon asetetaan arvio mittaustulosten variansseista. Kalman-suodatin pyrkii minimoimaan kaavassa (16) esitetyn virhekovarianssin.



**Kuva 13:** Kalman-suodatin [16]

Kuvassa [13] on esitetty lohkokkaavio Kalman-suodattimen toiminnasta. Kuvasta nähdään, että kyseessä on takaisinkytkentä, jossa aiemmat mittaustulokset vaikuttavat arvioon seuraavasta tuloksesta. Tämän ansioista Kalman-suodatin pystyy arvioimaan kohteen todellista sijaintia ottamalla huomioon kohteen edellisen liiketilan. Paikallaan olevan radiolähtetimen tapauksessa voidaan olettaa, että kohteella ei ole liiketilaa ja kaikkien mitattujen suuntakulmien tulisi osoittaa samaan pisteeseen. Äkilliset muutokset suuntakulmissa voidaan olettaa johtuviksi satunnaisesta kohinasta ja heijastuksista eikä kohteen liikkeestä. Kalman-suodattimen tehtäväksi jää tällöin arvioida mitattujen suuntakulmien virhejakaumaa ja täten myös radiolähtetimen todellista sijaintia. Kalman-suodatin etenee vaiheittain seuraavasti:

1. Arvioidaan järjestelmän tila ennen mittausta. Tämä yhtälö voi esittää kappaleen liiketilaa tai paikallaan olevaa kappaletta.

$$\hat{s}_{i|-} = \Phi \hat{s}_{i-1} + B u_{k-1}\tag{17}$$

2. Arvioidaan kovarianssimatriisi ennen mittausta

$$\Gamma_{i|-} = \Phi \Gamma_{i-1} \Phi^T + Q \quad (18)$$

3. Lasketaan Kalman-vahvistus

$$K_i = \Gamma_{i|-} H^T (H \Gamma_{i|-} H^T + R)^{-1} \quad (19)$$

4. Päivitetään tila arvio

$$\hat{s}_i = \hat{s}_{i|-} + K_i (z_i - H \hat{s}_{i|-}) \quad (20)$$

5. Päivitetään tilojen kovarianssimatriisi

$$\Gamma_i = (I - K_i H) \Gamma_{i|-} \quad (21)$$

Algoritmin alkuarvoiksi esitetään arvaus radiolähettimen sijainnista ja kovarianssimatriisista:

$$\hat{s}_{0|-} = \xi \{s_0\} \quad (22)$$

$$\Gamma_{0|-} = \text{cov} \{s_0\} \quad (23)$$

Kalman-suodattimen yhtälöt jakautuvat kahteen ryhmään, ajan päivitykseen yhtälöissä (17) ja (18) sekä mittauksen päivitykseen, yhtälöt (20) ja (21). Aikapäivitys yhtälöt projisoivat ajassa eteenpäin nykyisiä tila- ja kovarianssiarvioita seuraavaa askelta varten, ja mittauspäivitys yhtälöt liittävät uusia mittaustuloksia ennustukseen, jolloin saadaan parannettua nykyistä tila-arviota. Seuraava tila-arvio saadaan Kalman-vahvistuksen avulla kaavasta (19). Algoritmin alustukseen tarvitaan alkuarvaukset lähettimen sijainnista ja

virhekovarianssista kaavoihin (22) ja (23). Alkuarvaukseksi sopii esimerkiksi lineaarisella mallilla saatu karkea arvio radiolähtetimen sijainnista. Kovarianssimatriisin alustukseen taas sopii yksikkömatriisi tai käytettävän anturin datalehdessä luetut arvot. Sekä arvio radiolähtetimen sijainnista, että kovarianssimatriisista päivittyvät algoritmin ajon aikana ja niiden pitäisi konvergoitua optimaalisiin arvoihinsa kunhan mittaustuloksia on vain tarpeeksi saatavilla. Kohinaprosessit oletetaan ei-korreloiviksi, jolloin voidaan merkitä:

$$Q_i = \begin{bmatrix} \sigma_{n_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{n_N}^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$R_i = \begin{bmatrix} \sigma_{\eta_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\eta_N}^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Kaava (24) tarkoittaa kohteen liiketilan kovarianssia ja kaava (25) taas suuntakulman mittausrvirheen kovarianssia. Paikannettaessa paikallaan olevaa radiolähetintä voidaan olettaa kohteen liiketila nolllaksi ja täten poistaa toinen virheprosessi kokonaan.

### 5.2.2 Laajennettu Kalman-suodatin

Laajennettu Kalman-suodatin on perinteisen Kalman-suodattimen laajennos, jossa epälineaarisen järjestelmän epälineaarisuus pyritään linearisoimaan Taylorin sarjalla, johon on otettu mukaan vain ensimmäisen asteen termit. Radiolähtetimen paikannuksessa on käytettävä laajennettua Kalman-suodatinta, sillä suuntakulman ja tunnetun paikan paikannustulokseksi projisoiva arkustangentti-funktio on vahvasti epälineaarinen [1]. Lähtetimen paikan arviointi laajennetulla Kalman suotimella onnistuu seuraavasti. Merkitään lähtetimen paikkaa:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{T,k} \\ \hat{y}_{T,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{T,k-1} \\ \hat{y}_{T,k-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Kaava (26) esittää tilasiirtymän kohteen edellisestä liiketilasta seuraavaan tilaan tilasiirtymämatriisin avulla. Arviota radiolähtetimen sijainnista merkitään  $[\hat{x}_T, \hat{y}_T]$ . Tilasiirtymämatriisi on yksikkömatriisi, koska lähtetimen oletetaan olevan paikallaan. Mittaustulokset ovat suuntakulmia lähettimeen:

$$\Phi_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k) + \eta_k \quad (27)$$

Kaava (27) esittää anturilla  $k$  mitattua suuntakulmaa  $\Phi$ . Mittaustuloksessa oletetaan olevan normaalisti jakautunutta kohinaa  $\eta_k$ . Tilapäivitysyhtälönä käytetään (18) sijasta:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|-} + K_k (\Phi_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|-})) \quad (28)$$

Yhtälössä (28) yhdistetään edellisten mittausten tulokset ja projisoidaan kohteen tilaa ajassa eteenpäin. Nykyistä tilaa edeltävä tila saadaan sijoittamalla kaavaan (28) paikannusyhtälö:

$$h(\hat{\mathbf{x}}_{k|-}) = \arctan\left(\frac{\hat{y}_{T,k|-} - y_k}{\hat{x}_{T,k|-} - x_k}\right) \quad (29)$$

Kaavassa (29) esitetään kohteen nykyinen liiketila käyttämällä arvioita edellisestä liiketilasta. Paikallaan olevan radiolähtetimen tapauksessa kaava (29) tarkoittaa samaa kuin kaava (1). Kovarianssin päivitykseen käytetään (19) sijasta:

$$\Gamma_k = (I - K_k H(\hat{\mathbf{x}}_{k|-})) \Gamma_{k|-} \quad (30)$$

Kaavassa (30) missä  $\mathbf{H}$  on kohteen arvioitu virhekovarianssi. Tällöin Kalman-vahvistus on muotoa:

$$K_k = \Gamma_{k|k-1} H^T(\hat{x}_{k|k-1}) (H(\hat{x}_{k|k-1}) \Gamma_{k|k-1} H^T(\hat{x}_{k|k-1}) + R_k)^{-1} \quad (31)$$

Yhtälössä (31) oletetaan ainoan virheprosessin olevan mittausvirheiden normaalisti ja-kautunutta kohinaa. Tällöin kohinaprosessi voidaan esittää muodossa:

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Yhtälössä (31) kohinaprocessit ovat ei-korreloivia ja matriisin halkaisijalla esitetään arvioit mittausvirheiden varianssista. Seuraavan kierroksen arvio kovarianssimatriisista saadaan:

$$\Gamma_{k+1} = J \Gamma_k J^T + Q \quad (32)$$

Yhtälössä (32) projisoidaan edellisen kierroksen kovarianssimatriisia ajassa eteenpäin käyttämällä tilasiirtymäyhtälöstä laskettua Jaakobin matriisia:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Fm}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Fm}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (33)$$

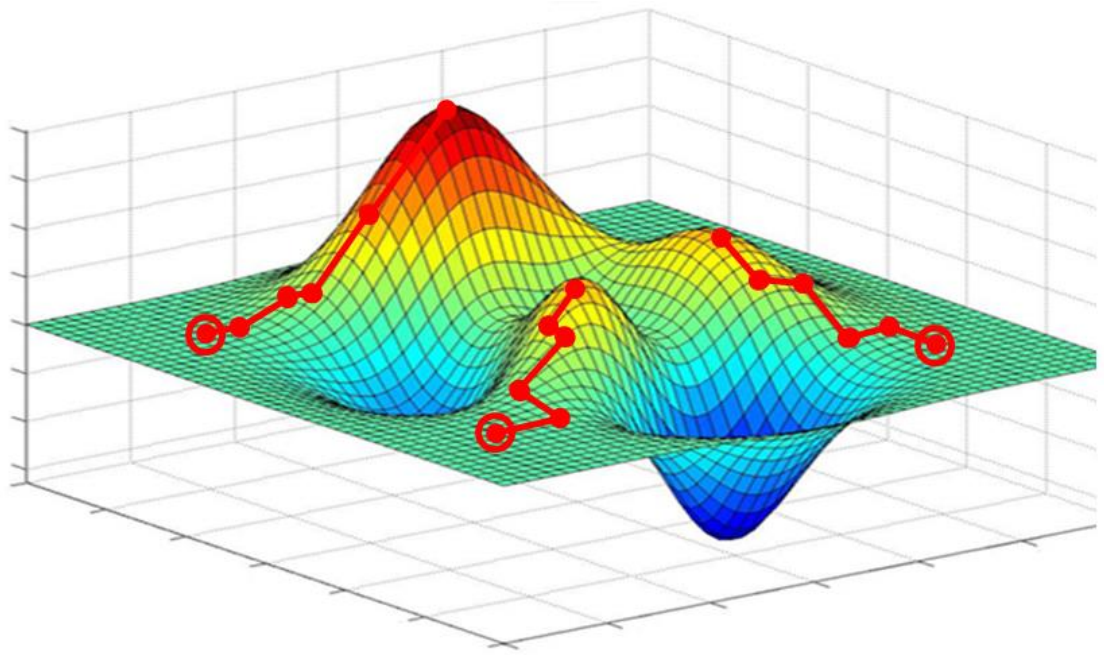
Yhtälössä (33) lasketaan yhtälöryhmän ensimmäisen asteen osittaisderivaatat. Radiolähettimien paikannuksessa x-y-tasolla osittaisderivaatat lasketaan sekä x:lle ja y:lle. Yhtälöiden lukumäärä  $m$  riippuu paikantavien antureiden lukumäärästä.

### 5.3 Geneettinen optimointi

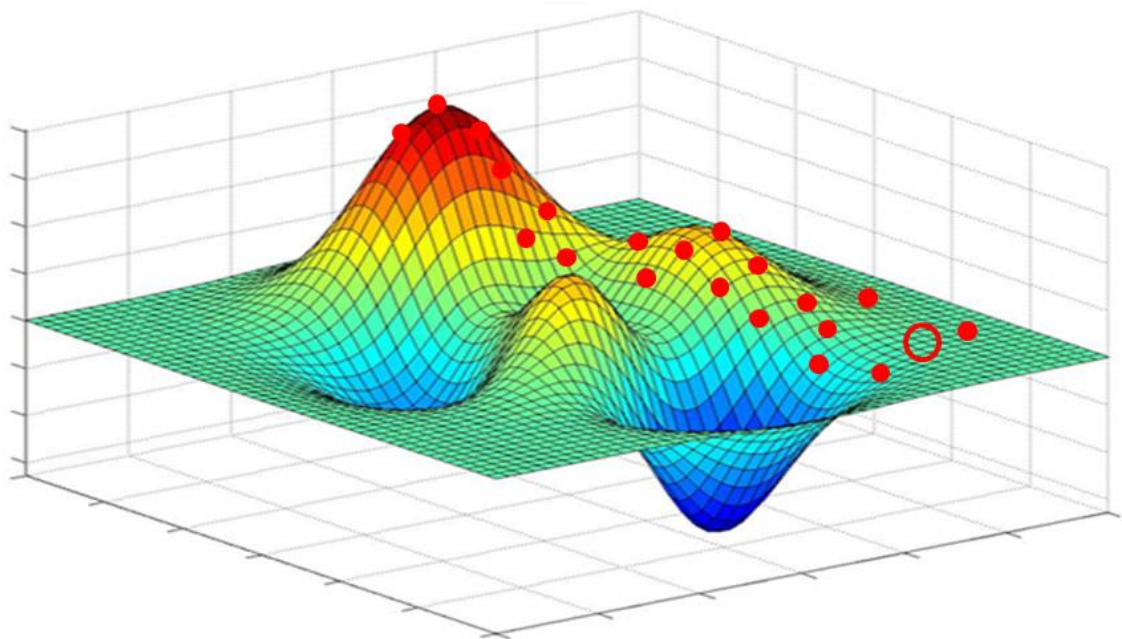
Geneettinen optimointi perustuu matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen luonnollista evoluutiota jäljittelevän algoritmin avulla. Yksittäinen ratkaisu vastaa evoluutiobiologista kromosomia. Tietokoneella luodaan keinotekoinen evoluutioprosessi, joka

muokkaa aluksi satunnaisesti luotuja kromosomeja eli ratkaisuja matemaattiseen ongelmaan. Tämän jälkeen kromosomipopulaatiota aletaan risteyttää keskenään ja muodostetaan yhdistelmiä kahdesta alkuperäisestä kromosomista. Risteyttämisen jälkeen kromosomien suorituskykyä arvioidaan ennalta määrättyllä hyvyysfunktioilla. Hyvyysfunktioista parhaat pisteet saaneet pääsevät suuremmalla todennäköisyydellä seuraavalle evoluutiokierrokselle. Seuraavalle kierrokselle voi kuitenkin päästä myös huonot pisteet saanut kromosomi, lisäksi jokaisen evoluutiokierroksen alussa kromosomeihin lisätään satunnaisia mutaatioita aivan kuten luonnollisessakin evoluutiossa. Tavoite on, että tarpeeksi monen sukupolven jälkeen kromosomipopulaatio löytää ratkaisun vaikeankin matemaattiseen ongelmaan, sillä ratkaisun kannalta oleelliset parametrit pyrkivät säilymään ja vahvistumaan. Geneettisen algoritmin avulla on mahdollista ratkaista yhtälöitä joilla on yksi tai useampia epäjatkuvuuskohtia toisin kuin edellisissä kappaleissa esitellyillä algoritmeilla. Tässä tapauksessa kromosomeina toimivat paikannusyhtälöön asetettavat alkuarvaukset radiolähettimen sijainnista  $x$ - $y$ -tasolla. Alkuarvauksen jälkeen algoritmin tulosta iteroidaan vielä Gaussin ja Newtonin algoritmin tyyliä laskevan gradientin suuntaan. Kromosomin hyvyys arvioidaan sijoittamalla gradienttiratkaisun lopputulos paikannusyhtälöön. Mitä pienempi virhe saadaan, sen suuremmat pisteet kromosomi saa. Geneettisen algoritmin käyttäminen gradienttialgoritmin kanssa pitäisi eliminoida kyseisille algoritmeille tyypilliset virheet, joissa algoritmi jää jumiin paikalliseen minimiin. Keinotekoinen evoluutio suosii kromosomeja, jotka pääsevät pienempään yhteisvirheeseen ja tällöin myös lokaalin minimin ulkopuolella olevat tulokset otetaan huomioon.

Tässä työssä käytetty geneettinen algoritmi pyrkii yhdistelemään gradienttiin perustuvan optimoinnin evoluutioalgoritmiin jolloin on mahdollista ratkaista vaikeita optimointiongelmia, kuten funktioita, joilla on epäjatkuvuuskohtia tai satulapisteitä. Derivaattaan perustuvat algoritmit saattavat tällöin päätyä paikalliseen ratkaisuun, vaikka parempi globaali ratkaisu olisi olemassa. Ratkaisun läheisyydessä saattaa kuitenkin olla avuksi tarkentaa evoluution avulla löydettyä ratkaisua, joten geneettisen algoritmin ja gradienttiin perustuvan optimoinnin avulla voidaan päästä hyvään lopputulokseen. Kuvassa [14] on esitetty gradienttialgoritmin käyttäytyminen optimoitaessa  $x$ - $y$ -tasolla funktiota jolla on useita paikallisia maksimikohtia. Riippuen funktion alkuarvauksesta gradienttialgoritmi saattaa päätyä erilaiseen lopputulokseen. Kuvassa [15] on esitetty geneettisen optimoinnin toiminta samaa funktiota optimoitaessa. Geneettinen optimointi ei jää jumiin paikalliseen maksimiin, sillä sen mutaatio-operaattorit tuovat ratkaisupopulaatioon satunnaisesti myös hyvin paljon nykyisestä parhaasta kromosomista eroavia ratkaisuja. Tällöin on mahdollista siirtyä kauaksi nykyisestä arvauksesta jolloin on mahdollista löytää ratkaisualueella oleva globaali maksimikohta.



**Kuva 14:** Gradienttioptimoinnin toiminta [14]

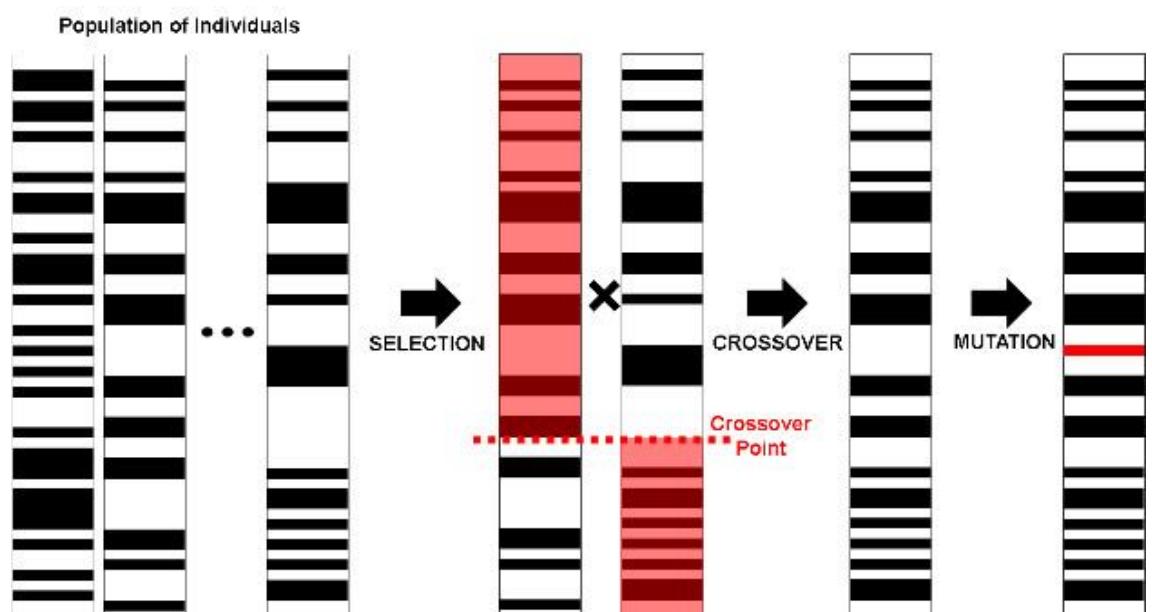


**Kuva 15:** Geneettisen optimoinnin toiminta [14]

### 5.3.1 Geneettisen algoritmin toiminta

Alustusvaiheessa useita yksittäisratkaisuja luodaan satunnaisesti alkupopulaation luomiseksi. Populaation koko riippuu suuresti käsiteltävästä tapauksesta, mutta tyypillisesti populaation koko on satojen tai tuhansien kromosomien kokoinen. Perinteisesti alkupopulaatio luodaan satunnaisesti ja tasaisesti koko hakuavaruuden alueelta. Joissakin

tapauksissa alkupopulaation luomisessa voidaan painottaa niitä hakuavaruuden alueita, joilta optimaalisen ratkaisun oletetaan todennäköisesti löytyvän. Jokaisella algoritmin etenemisaskeleella osa sen hetkisestä populaatiosta valitaan tuottamaan jälkikasvunaan uusi sukupolvi. Yksittäiset ratkaisut valitaan sopivuuteen perustuen siten, että parhaimman sopivuusarvon saavilla ratkaisuilla on suurin todennäköisyys tulla valituksi uuden sukupolven tuottajaksi. Valintamenetelmiä on olemassa useita, joissa valittavien yksilöiden osuuden suurus ja valintamenetelmän satunnaisuus vaihtelevat. Seuraava askel on uuden sukupolven tuottaminen edellisestä sukupolvesta valittujen yksilöiden perusteella. Uusien yksittäisratkaisujen tuottamisessa käytetään geneettisiä siirtymän, rekombinaation ja mutaation operaatioita. Jokaista uutta luotavaa ratkaisua varten valitaan kaksi "vanhempaa". Näiden "jälkeläinen" muodostetaan yhdistelemällä (usein satunnaisesti) molempien vanhempien ominaisuuksia. Tätä menettelyä jatketaan, kunnes uuden populaation koko on riittävän suuri. Kuvattu prosessi tuottaa lopulta uuden populaation, joka poikkeaa alkuperäisestä populaatiosta. Yleensä toisen populaation keskimääräinen sopivuus on ensimmäistä parempi, koska ratkaisukandidaattien joukosta on valintaprosessin aikana karsiutunut pois sopivuudeltaan huonot ratkaisut. Kuvassa [16] on esitetty geneettisen algoritmin evoluutioprosessi. [15]



**Kuva 16:** Geneettisen algoritmin evoluutio [14]

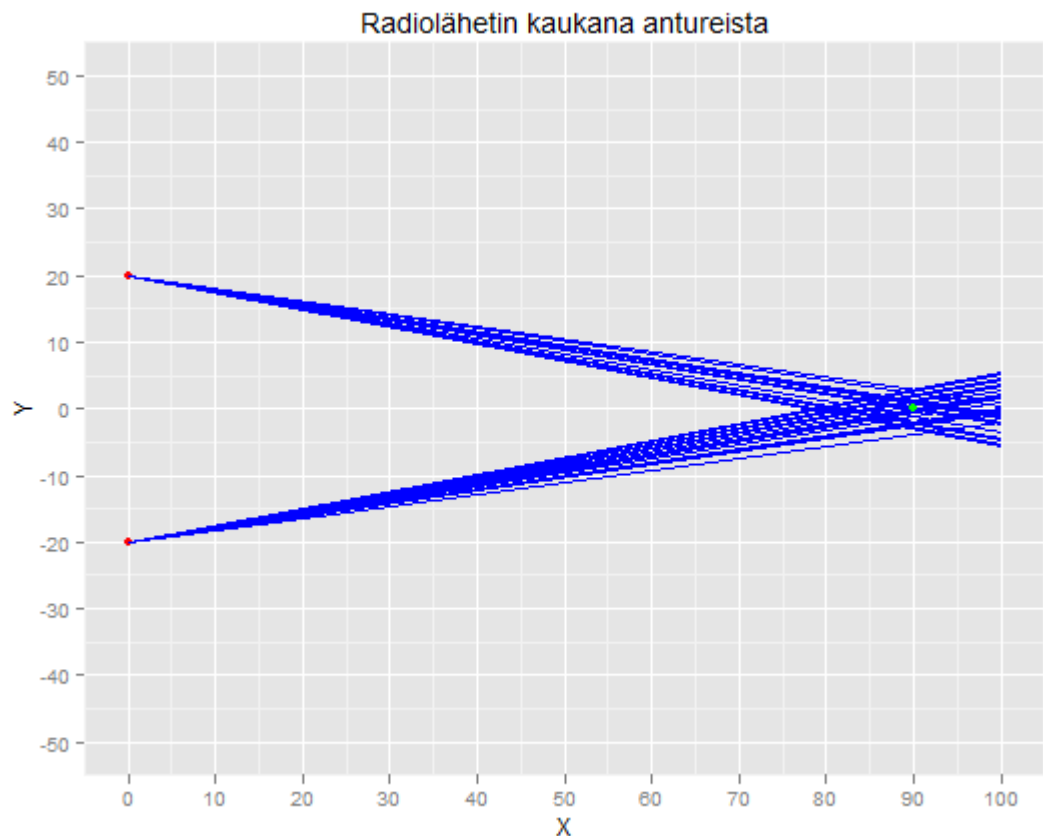
Evoluutioprosessissa valitaan ensin kaksi risteytettävää kromosomia. Tämän jälkeen molemmista kromosomeista valitaan kohta, josta kromosomin geenit yhdistetään toisiinsa. Kromosomien jälkeläinen saa satunnaisesti osan vanhempiensa ominaisuuksista. Lopuksi osaa jälkeläisen geeneistä muutetaan vielä satunnaisella mutaatiolla. Mutaatio lisää evoluution satunnaisen komponentin jonka avulla jälkeläisille on mahdollista muodostua ominaisuuksia joita ei ole kummallakaan vanhemmista. Tämän ansiosta on mahdollista, että jälkeläinen päättyy hyvinkin erilaiseen ratkaisuun



kuin kumpikaan vanhemmistaan. Radiolähettimen paikantamisessa tämä tarkoittaa sitä, että vaikka kahden vanhemmista koordinaatit olisivat lähellä etsittävän alueen alareunaa, mutaatio-operaattori saattaa tuottaa jälkeläisen joka aloittaa etsintänsä yläreunasta. Evoluutiossa seuraavaan sukupolveen pääsee myös osa epäsuotuisista kromosomeista. Tämä auttaa säilyttämään ratkaisujoukon monimuotoisuuden ja on avuksi etsittäessä globaalia maksimia tai minimiä mahdollisten lokaalien arvojen joukosta.

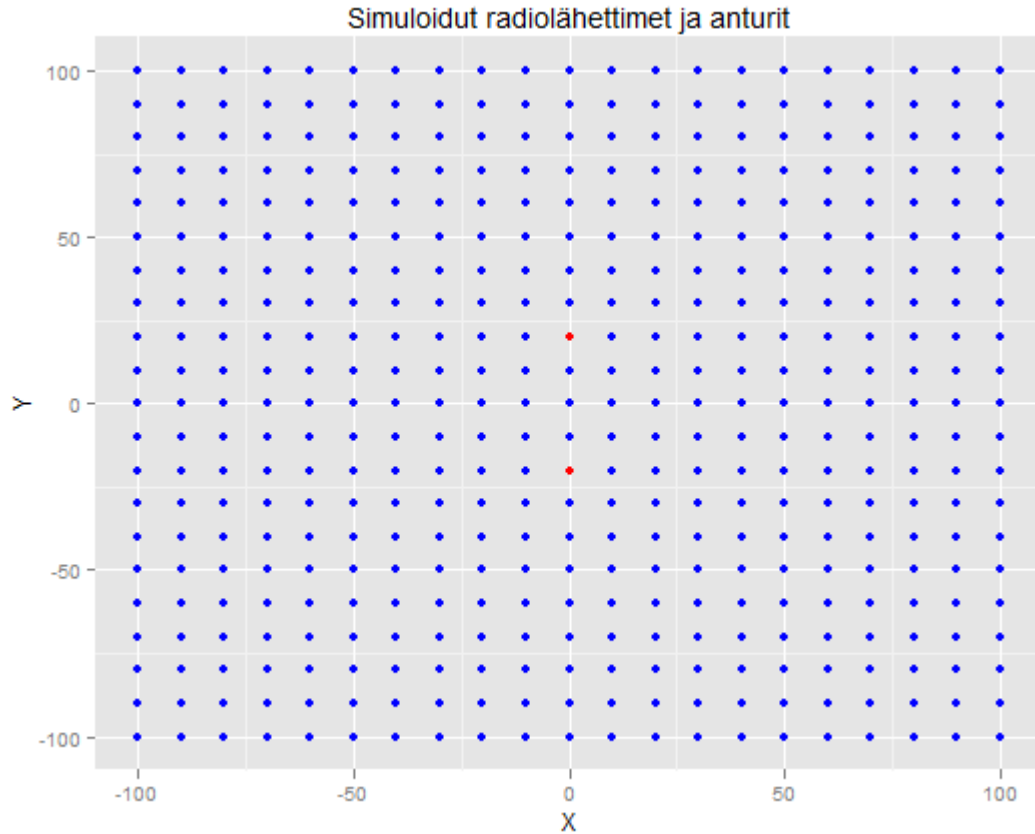
## 6. RADIOLÄHETTIMIEN SIMULOINTI

Paikannusalgoritmien toimintaa pyritään arvioimaan todellisuutta vastaavissa olosuhteissa. Yksinkertaisuuden vuoksi paikantavia antureita on kaksi. Näiden antureiden ympäriltä otetaan tarkasteluun 200x200 alue, jolle asetetaan tasaisin välimatkoin radiolähettä. Tämän jälkeen mitataan jokaisen lähettimen suunta. Mitattuihin suuntakulmiin lisätään normaalista jakautunut virhe, jonka keskihajonta on nykyisellä teknologialla yksi aste [4]. Paikannusalgoritmien paikannustarkkuuteen saattaa vaikuttaa myös radiolähetimestä saatujen mittausten lukumäärä. Oletettavasti algoritmien paikannustarkkuus paranee mittausten määrän kasvaessa. Tämän takia paikannustuloksia simuloidaan sekä kahdella mittauksella per radiolähetin että 20 mittauksella per radiolähetin. Simuloitujen suuntakulmien toimintaa kokeiltiin piirtämällä x-y-tasolle mitatut suuntakulmat yksittäiseen kaukana mittausantureista sijaitsevaan radiolähettimeen. Kuva [17]. Kuvasta havaitaan oletuksen mukaisesti, että kaukana sijaitseva radiolähetin on selvästi vaikeampi paikantaa kuin lähellä sijaitseva.



**Kuva 17:** Simuloidut mittaustulokset yksittäiseen radiolähettimeen.

Seuraavaksi piirrettiin kuvaaja kaikista paikannettavista radiolähettimistä sekä niiden joukkoon sijoitetusta kahdesta paikannusanturista. Kuva [18]. Radiolähtetimet ovat oletuksen mukaisesti tasaisesti jakautuneet ja sijaitsevat vaihtelevilla etäisyyksillä paikannusantureista. Kuvassa on esitetty alueelle luodut radiolähtetimet sinisellä värillä sekä kaksi mittaavaa anturia punaisella värillä.

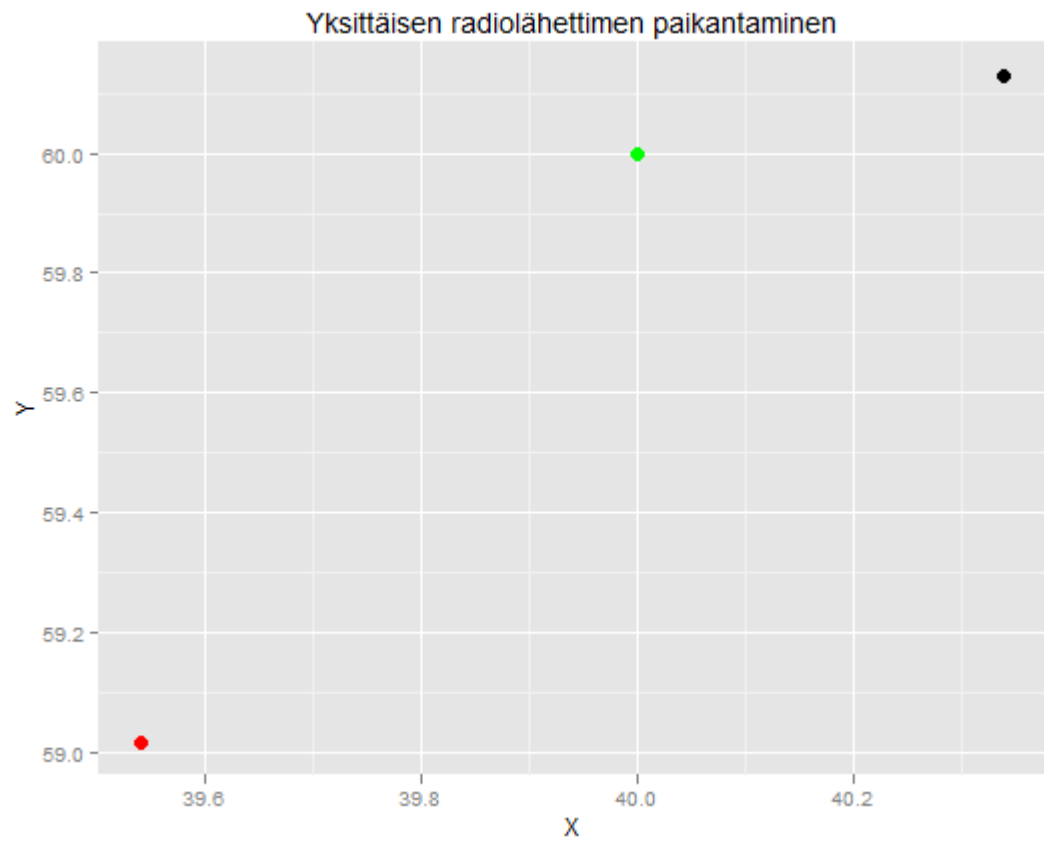


**Kuva 18:** Simuloidut radiolähtetimet ja anturit

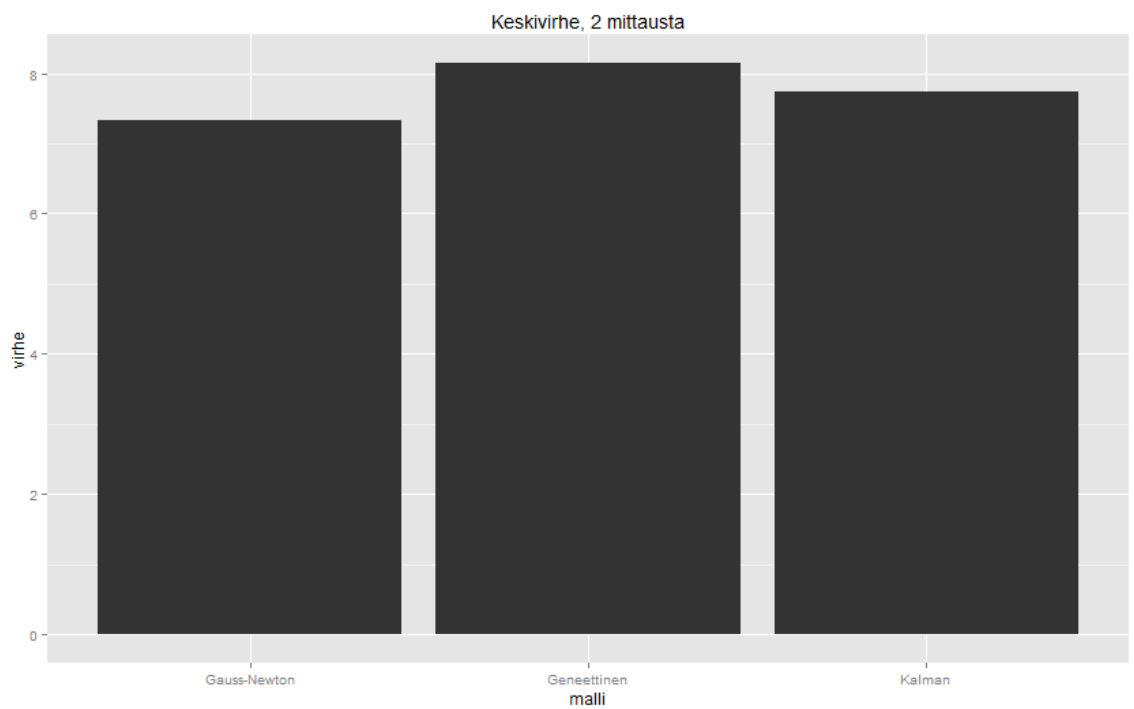
Simuloituihin radiolähtetimiin lasketut paikannusvirheet voidaan yleistää koko x-y-tasolle interpoloimalla paikannusvirheet radiolähtetmien välissä olevalla alueella. Tällöin saadaan pinta, joka esittää paikannusvirhettä koko x-y-tasolla.

## 7. PAIKANNUSALGORITMIEN PAIKANNUSTARKKUUDEN ARVIOINTI

Paikannusalgoritmien vertailussa keskityttiin mittaamaan paikannusalgoritmien paikannusvirhettä simuloitulla alueella oleviin radiolähttimiin. Aluksi kokeiltiin yksittäisen radiolähttimen paikantamista, jotta varmistuttaisiin algoritmien antavan ainakin suunnilleen samansuuntaisia paikannustuloksia. Kuvassa [19] on esitetty kaikkien kolmen algoritmin paikannustulokset yksittäiseen radiolähttimeen. Mustalla värillä on merkitty geneettisen optimoinnin paikannustulos, vihreällä Gaussin ja Newtonin algoritmien paikannustulos sekä punaisella värillä Kalman-suodattimen paikannustulos. Kyseiset pisteet ovat suhteellisen lähellä toisiaan, joten voidaan olettaa paikannusalgoritmien toteutuksen olevan oikein ja kaikkien algoritmien soveltuvan radiolähttimen paikantamiseen. Seuraavaksi ajettiin simulaatio koko alueelle ja otettiin kaksi mittausta jokaisesta radiolähttimestä. Tämän jälkeen paikannettiin kaikki radiolähttimet jokaisella paikannusalgoritmilla ja laskettiin keskimääräinen paikannusvirhe. Paikannusalgoritmien keskimääräiset virheet ovat esitetty kuvassa [20].



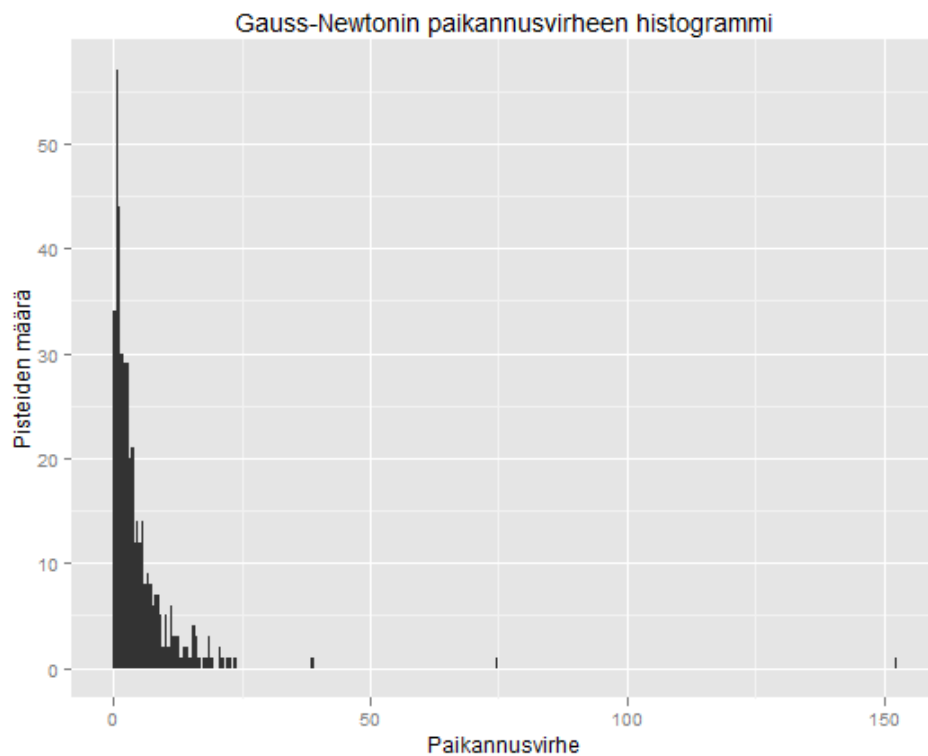
**Kuva 19:** Yksittäisen radiolähettimen paikantaminen



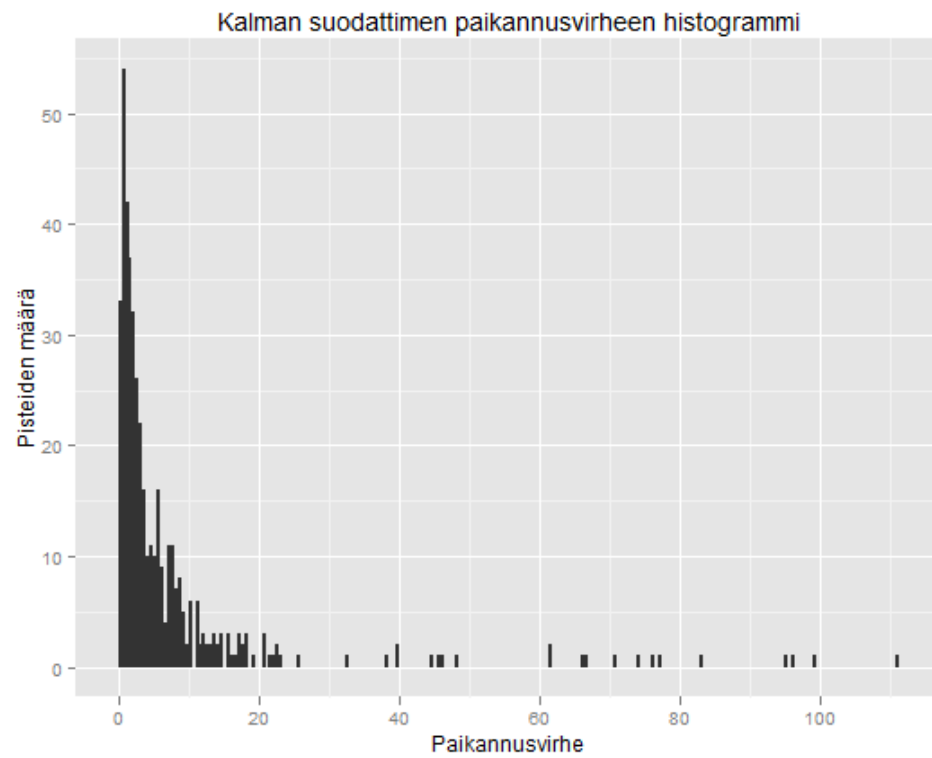
**Kuva 20:** Paikannusalgoritmien keskivirhe. Kaksi mittausa per radiolähetin

Kaikkien paikannusalgoritmien keskivirheet ovat hyvin lähellä toisiaan kun kaikki radiolähettimet ovat paikannettu käyttäen kahta mittausta per radiolähetin. Gaussin ja Newtonin algoritmilla on keskimääräisesti pienin paikannusvirhe. Paikannusvirheen tarkempaa analyysia varten kaikilta algoritmeilta laskettiin paikannusvirheen histogrammi.

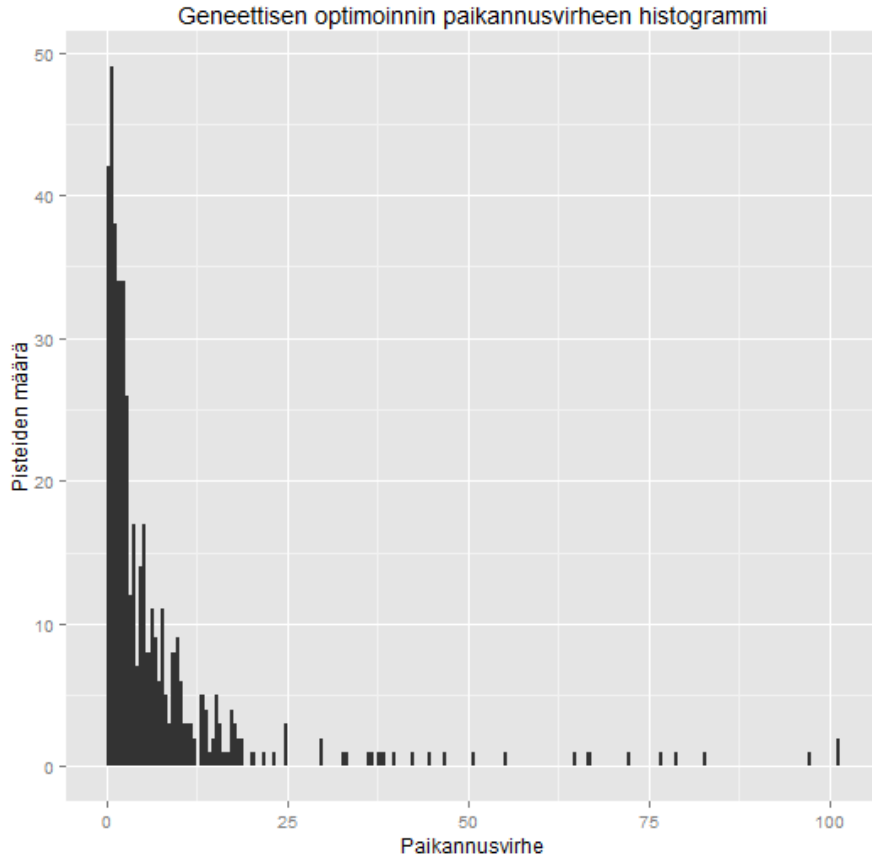
Kuvissa [21], [22] ja [23] on esitetty Gaussin ja Newtonin algoritmin, Kalman suodattimen ja geneettisen optimoinnin paikannusvirheiden histogrammit. Kaikkien algoritmien paikannusvirheiden histogrammit ovat hyvin lähellä toisiaan. Gaussin ja Newtonin algoritmi kuitenkin erottuu joukosta, sillä sen histogrammissa on vain muutama hyvin suuri paikannusvirhe.



**Kuva 21:** Gaussin ja Newtonin algoritmin paikannusvirheen histogrammi



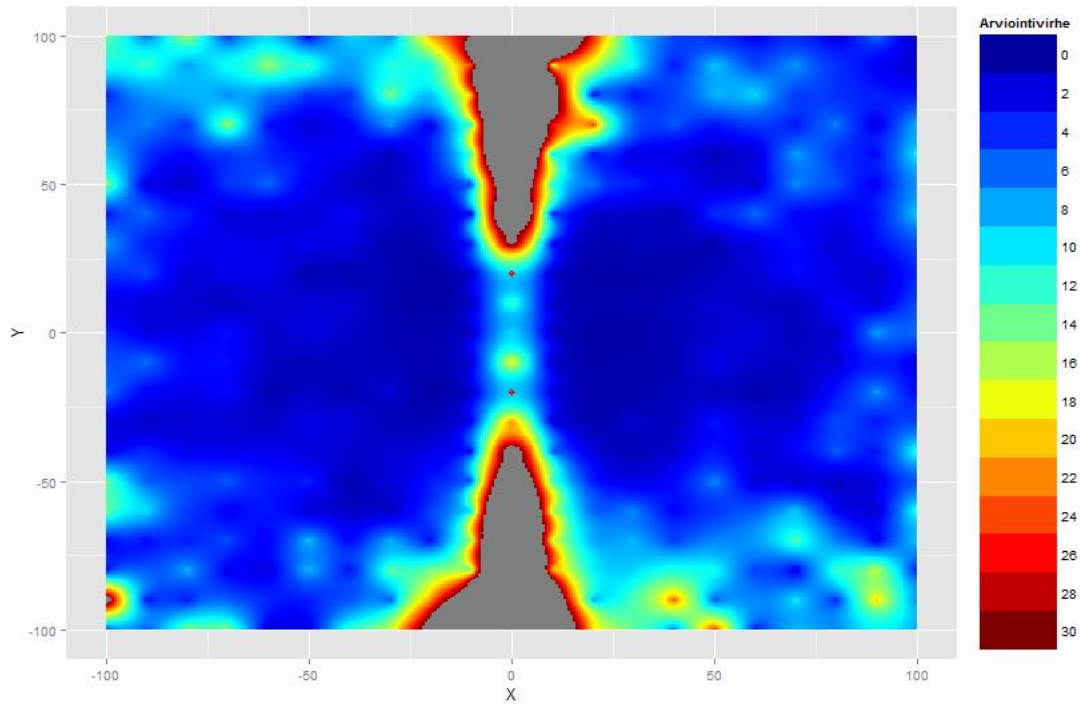
**Kuva 22:** Kalman suodattimen paikannusvirheen histogrammi



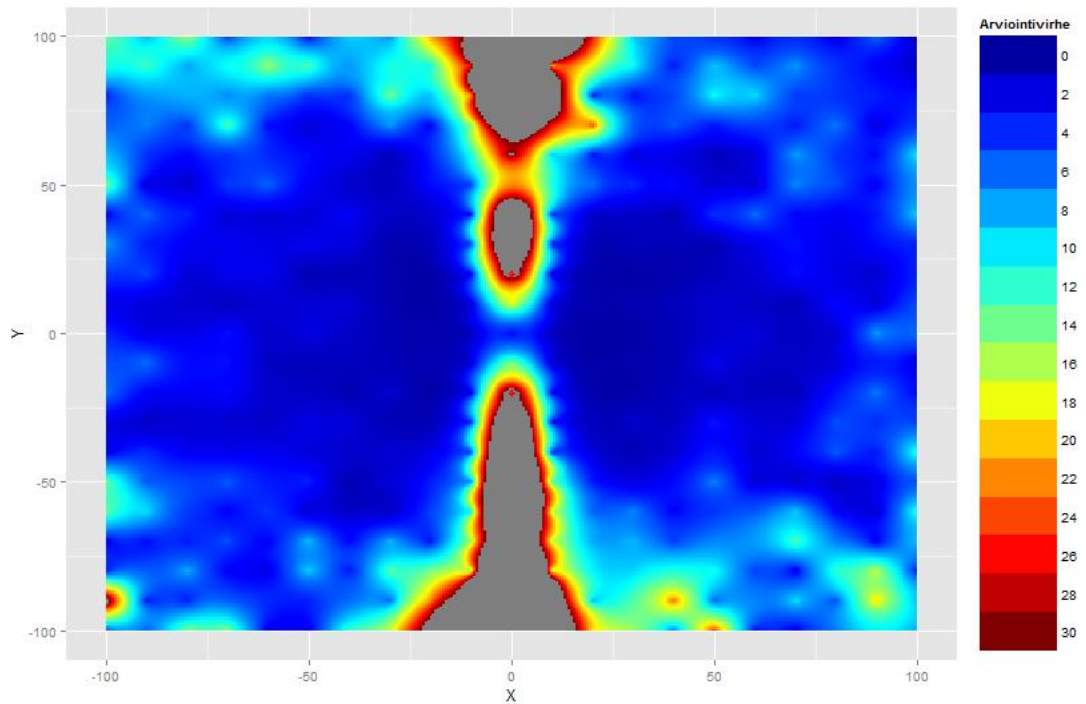
**Kuva 23:** Geneettisen optimoinnin paikannusvirheen histogrammi

Paikannusvirheiden histogrammeista ei voida kuitenkaan päätellä paikannusalgoritmien paikannusvirheiden jakautumista eri etäisyyksillä olevien radiolähettimien kesken. Hyvän paikannusalgoritmin tulisi myös käyttäytyä ennustettavasti eikä paikannusvirhe saisi sisältää yllättäviä epäjatkuvuuskohtia paikannettaessa lähellä tai kaukana sijaitsevia radiolähtimiä. Seuraavaksi paikannusalgoritmien paikannusvirhe esitettiin x-y-tasossa kuvissa [24], [25] ja [26]. Kalman suodattimen ja geneettisen optimoinnin virhealueet ovat hyvin samanmuotoiset ja sisältävät satunnaista kohinaa. Gaussin ja Newtonin algoritmien virhealue taas on selvästi tasaisempi ja se pystyy paikantamaan radiolähtimiä kauempaa myös y-akselilla, jossa paikannusvirhe lisääntyy kaikilla algoritmeilla voimakkaasti siirryttäessä kauemmas antureista. Tämä johtuu satunnaisista virheistä radiolähettimen suunnan määrittämisessä. Pienikin virhe mitatussa suuntakulmassa kertaantuu etäisyyden kasvaessa.

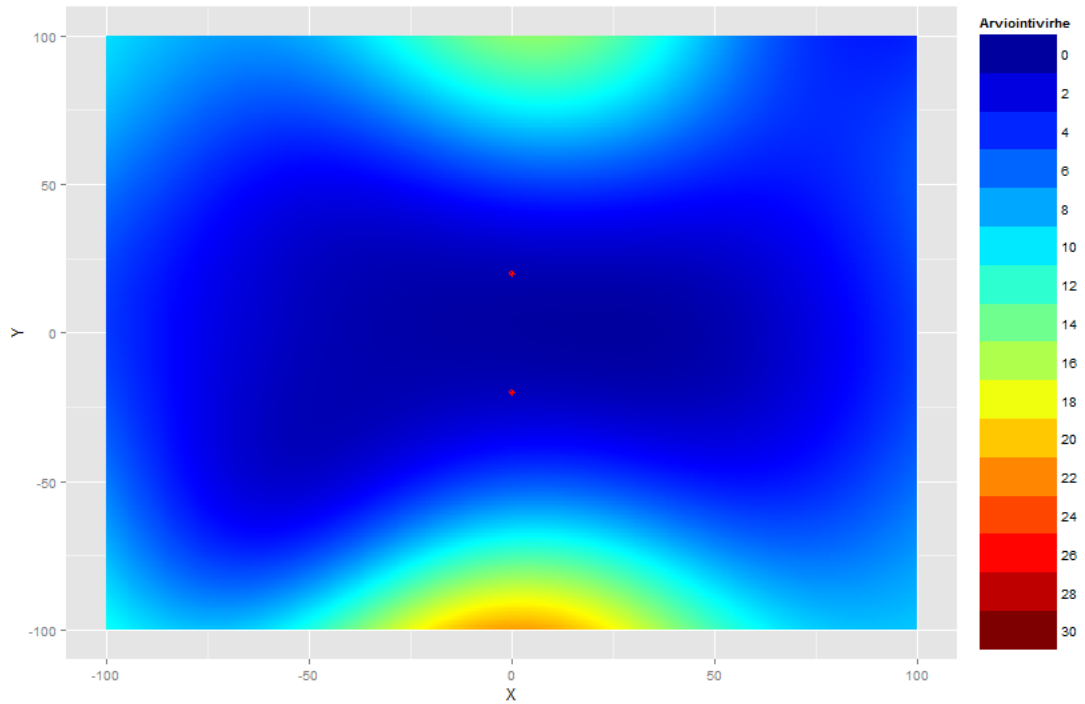




**Kuva 24:** Kalman-suodattimen arviointivirhe  $x$ - $y$ -koordinaatistossa, 2 mittausta per radiolähetin

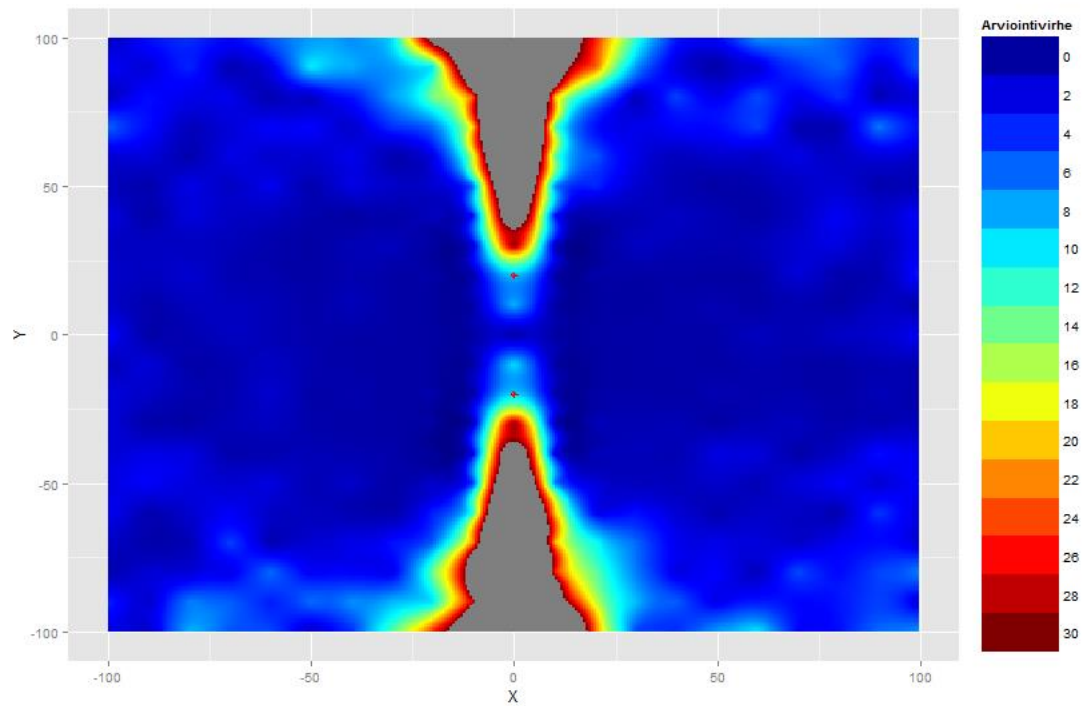


**Kuva 25:** Geneettisen optimoinnin arviointivirhe  $x$ - $y$ -koordinaatistossa, 2 mittausta per radiolähetin

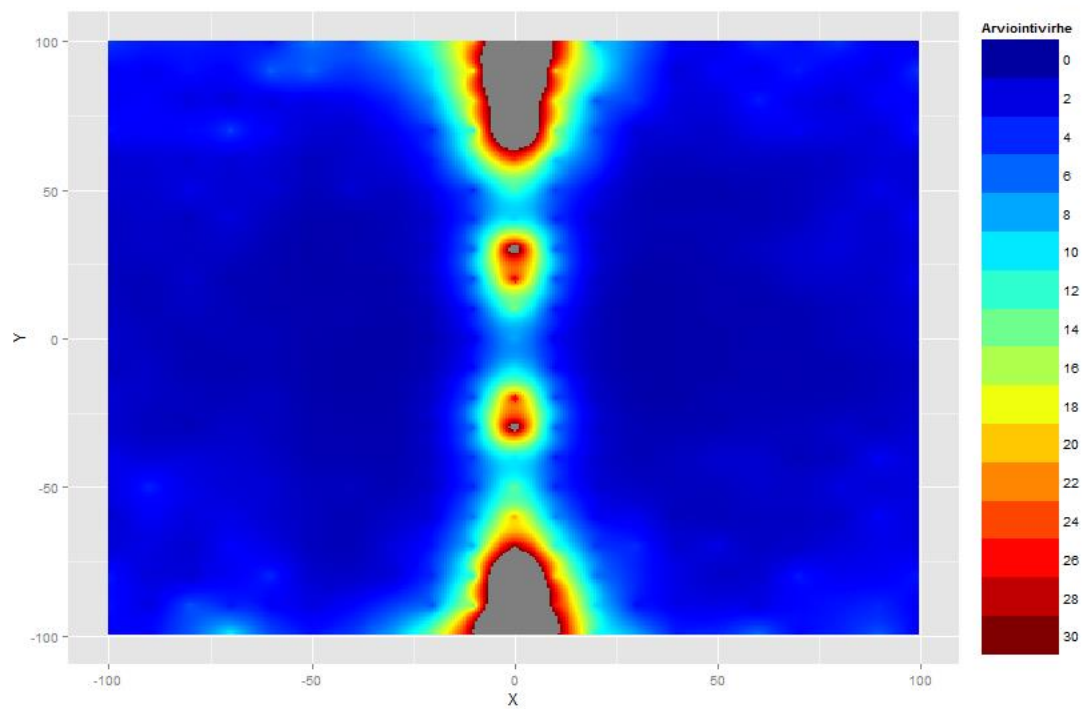


**Kuva 26:** Gaussin ja Newtonin algoritmin arviointivirhe, 2 mittausa per radiolähetin

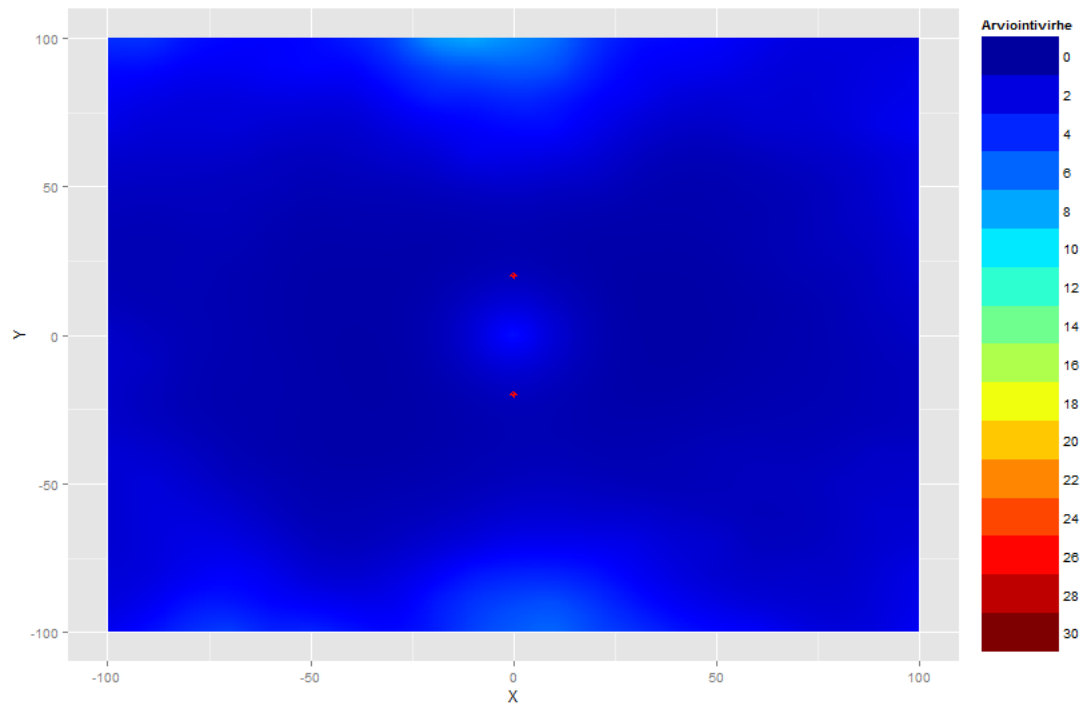
Seuraavaksi pyrittiin parantamaan algoritmien paikannuskykyä ajamalla uusi simulaatio, jossa jokaiseen radiolähettimeen otettiin 20 mittausa. Useamman mittauksen pitäisi auttaa algoritmeja saamaan tarkemman käsityksen virhejakaumasta. Simulaation tulokset ovat kuvissa [27], [28] ja [29]. Kalman-suodattimen ja geneettisen optimoinnin virhealueiden kohina on pienentynyt merkittävästi verrattaessa edelliseen simulaation, mutta paikannusvirheen kasvaminen y-akselilla on säilynyt samanlaisena. Gaussin ja Newtonin algoritmin virhealue muuttui merkittävästi edellisen simulaation virhealueeseen verrattuna. Käytettäessä 20 mittausa per radiolähetin Gaussin ja Newtonin algoritmi kykeni paikantamaan radiolähtimiä jopa y-akselilla jossa muut paikannusalgoritmit epäonnistuivat. Kuvassa [30] on esitetty kaikkien paikannusalgoritmien keskivirheet käytettäessä 20 mittausa per radiolähetin.



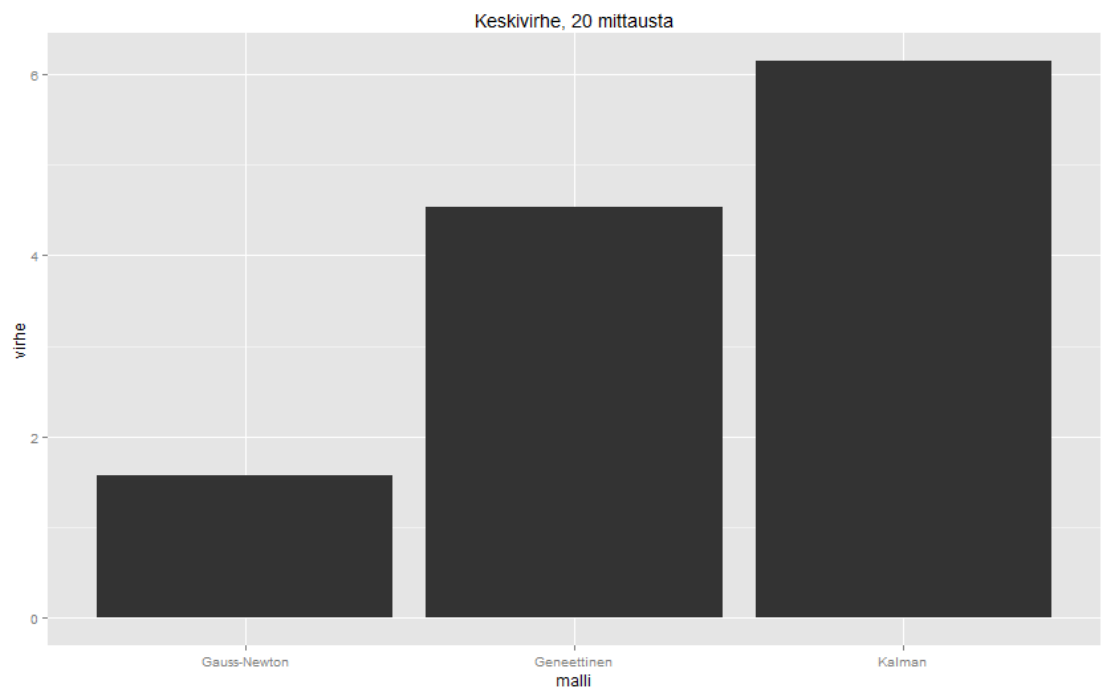
**Kuva 27:** Kalman-suodattimen arviointivirhe, 20 mittausta per radiolähetin



**Kuva 28:** Geneettisen optimoinnin arviointivirhe, 20 mittausta per radiolähetin



**Kuva 29:** Gaussin ja Newtonin algoritmin arviointivirhe, 20 mittaussta per radiolähetin



**Kuva 30:** Paikannusalgoritmien keskivirhe, 20 mittaussta per radiolähetin

Paikannusalgoritmien keskivirheet vahvistavat x-y-tason kuvien antamaa käsitystä siitä, että Gaussin ja Newtonin algoritmin paikannuskyky on huomattavasti parempi kuin Kalman suodattimen tai geneettisen optimoinnin käytettäessä 20 mittausa per radiolähetin. Tämä saattaa johtua algoritmien säädettävistä parametreista tai siitä, että Kalman-suodatin tai geneettinen optimointi ei sovellu hyvin tämäntyyppisen paikannusyhtälön ratkaisemiseen. Jatkoselvityksen aiheena voisi olla algoritmien toimintaan tarkempi perehtyminen ja säädettävien parametrien vaikutus sekä Kalman-suodattimen ja geneettisen optimoinnin paikannustuloksiin.

## 8. JOHTOPÄÄTÖKSET

Tässä työssä tarkasteltiin suuntakulmaan perustuvia radiolähtetimen paikannusalgoritmeja. Tarkasteluun valittiin Gaussin ja Newtonin gradienttialgoritmi, virhejakauman ennustamiseen perustuva Kalman-suodatin sekä evoluutiolaskentaa ja gradienttialgoritmia yhdistelevä geneettinen optimointi. Paikannusalgoritmien toimintaa simuloitiin asettamalla x-y-tasolla kaksi radiolähtetimen suuntaa mittaavaa anturia ja luomalla näiden ympärille tasavälein radiolähtetimiä. Tämän jälkeen ajettiin ensin simulaatio jossa jokaiseen radiolähtetimeen otettiin kaksi mittausta ja laskettiin yhteinen paikannusvirhe koko alueelle. Käytettäessä kahta mittausta per radiolähtetin kaikkien paikannusalgoritmien keskimääräinen paikannusvirhe on hyvin lähellä toisiaan. Paikannusvirheen jakauma x-y-tasolla käyttäytyi myös samaan tyyliin kaikilla algoritmeilla. Paikannusvirhe lisääntyi merkittävästi siirryttäessä y-akselilla kauemmas paikannusantureista. Seuraavaksi ajettiin simulaatio jossa otettiin 20 mittausta per radiolähtetin. Tässä simulaatiossa Gaussin ja Newtonin algoritmi paransi paikannusvirhettään merkittävästi toisin kuin Kalman-suodatin ja geneettinen optimointi. Johtopäätöksenä on, että paikannustarkkuudeltaan paras paikannusalgoritmi radiosuuntaan perustuvaan radiolähtetimen paikantamiseen on gradienttimenetelmään perustuva Gaussin ja Newtonin algoritmi, varsinkin, jos saatavissa on monta mittausta paikannettavaan radiolähtetimeen. Millekään algoritmille ei löytynyt epäjatkuvuuskohtia paikannusalueelta ja paikannustuloksissa ei ollut yllättäviä muutoksia siirryttäessä eri osiin x-y-tasoa. Jatkotutkimuksen kohteena voisi olla liikkuvan kohteen paikantaminen sekä perehtyminen tarkemmin Kalman-suodattimen ja geneettisen optimoinnin parametreihin ja niiden vaikutukseen kyseisten algoritmien suorituskäytössä. Yhteenveto paikannusalgoritmien suoriutumisesta paikannettaessa radiolähtetimiä kahdella ja 20 mittauksella on esitetty taulukoissa [1] ja [2].

**Taulukko 1:** Paikannusalgoritmien suoriutuminen paikannettaessa radiolähtetimiä kahdella mittauksella per radiolähtetin

	Gaussin ja Newtonin algoritmi	Kalman-suodatin	Geneettinen optimointi
Keskivirhe	2.82	3.09	3.23
Epäjatkuvuuskohtia	Ei	Ei	Ei
Paikannus kaikkiin radiolähtetimiin	Ei	Ei	Ei

**Taulukko 2:** Paikannusalgoritmien suoriutuminen paikannettaessa radiolähettäjiä 20 mittauksella per radiolähetin

	<b>Gaussin ja Newtonin algoritmi</b>	<b>Kalman-suodatin</b>	<b>Geneettinen optimointi</b>
<b>Keskivirhe</b>	0.95	1.60	1.19
<b>Epäjatkuvuuskohtia</b>	Ei	Ei	Ei
<b>Paikannus kaikkiin radiolähettäjiin</b>	Kyllä	Ei	Ei

Lisäämällä mittauksia yksittäiseen radiolähettimeen kaikkien paikannusalgoritmien keskimääräinen paikannustulos parantui. Gaussin ja Newtonin algoritmin merkittävästi, sillä kyseinen algoritmi pystyi paikantamaan myös x-akselilla sijaitsevat radiolähetimet. Näistä algoritmeista paikannustarkkuudelta ja luotettavuudeltaan paras valinta suunta- kulmaan perustuvaan radiolähettimen paikantamiseen on gradienttimenetelmään perustuva Gaussin ja Newtonin algoritmi.

## LÄHTEET

- [1] Kosola, J, Solante, T. 2000, Digitaalinen taistelukenttä, Julkaisusarja 1. Helsinki, Oy Edita Ab. 402 s.
- [2] Poisel, R. 2005, Electronic warfare target location methods, Norwood, Artech House. 272 s.
- [3] URSA, Radiotekniikka, artikkeli. [WWW]. [viitattu 28.3.2011]. Saatavissa: <http://www.ursa.fi/wiki/Radioastronomia/Radiotekniikka>
- [4] Rohde-schwartz direction finder datalehti. [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa: [http://www2.rohde-schwarz.com/file\\_5144/DDF0xA\\_en.pdf](http://www2.rohde-schwarz.com/file_5144/DDF0xA_en.pdf)
- [5] Sähkömagneettinen spektri [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa: [http://www03.edu.fi/oppimateriaalit/laboratorio/analyysimenetelmat\\_5-1\\_yleista\\_spektroskopiasta.html](http://www03.edu.fi/oppimateriaalit/laboratorio/analyysimenetelmat_5-1_yleista_spektroskopiasta.html)
- [6] Aikaeron mittaus useassa pisteessä [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa: <http://www.cisco.com/en/US/i/100001-200000/190001-200000/190001-191000/190537.jpg>
- [7] Adcock direction finder [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa: <http://www.ipellejero.es/tecnico/adcock/english.html>
- [8] Dopplersiirtymä [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa: <http://www.drphysics.com/syllabus/doppler/doppler.GIF>
- [9] Dopplerantenniryhmä [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa: <http://www.dopsys.com/products/Series%207000/Antenna.jpg>
- [10] Monitie-eteneminen [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa: [http://www.ice.rwth-aachen.de/uploads/RTEmagicC\\_a542126384.gif.gif](http://www.ice.rwth-aachen.de/uploads/RTEmagicC_a542126384.gif.gif)



- [11] Pelastushelikopteri [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa:  
<https://www.rkb.us/contentimages/1401357.jpg>
  
- [12] Civil air patrol [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa:  
[http://www.thefullwiki.org/Civil\\_Air\\_Patrol](http://www.thefullwiki.org/Civil_Air_Patrol)
  
- [13] NOAA Sarsat [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa:  
<http://www.sarsat.noaa.gov>
  
- [14] Portfolio optimization for insurance companies [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa:  
<http://www.air-worldwide.com/Publications/AIR-Currents/2010/Portfolio-Optimization-for-Insurance-Companies/>
  
- [15] Genetic Algorithms and Genetic Programming: Modern Concepts and Practical Applications, Taylor & Francis, Huhtikuu 9, 2009, 379 s.
  
- [16] Kalman kaavio [WWW]. [viitattu 28.3.2013]. Saatavissa:  
<http://research.microsoft.com/en-us/um/people/zhang/INRIA/Publis/Tutorial-Estim/img229.gif>